А Н А Л И З   Р А З Н О Т И П Н Ы Х   Д А Н Н Ы Х
(Вычислительные системы)
1983 год   Выпуск 99

УДК 519.876

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГАРМОНИЧНЫХ СИСТЕМ. II*)

Ю.Г.Косарев

В первой части данной работы [I] были установлены основные свойства гармоничных систем (Н-систем). При этом предполагалось, что как структура Н-системы, так и Н-операции на каждом иерархическом уровне заданы.

Первые два параграфа данной статьи служат основой для рассмотрения случаев, когда Н-операции не заданы (и их требуется найти) и когда требуется найти не только Н-операции, но и структуры Н-системы. Для решения этих задач необходимо прежде всего установить свойства степенных сумм, что и делается в § 7. Параграф 9 посвящен исследованию свойств степенных функций и Н-операций над ними, а также их геометрической интерпретации.

§7. Степенные суммы

Под степенными суммами (СС) будем понимать функции вида:

$$S^p(u_1,\dots,u_n) = \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\Big)^{1/p},\quad u_i\in R^+,\quad u=\sum_{i=1}^{n} u_i>0,\quad p\in R. \qquad (1)$$

7.I. Общие свойства СС.

7.I.I. СС - н е п р е р ы в н ы е функции от каждого из их аргументов в $(R^+)^n$.

7.I.2. СС - с и м м е т р и ч н ы е функции от аргументов $u_1,\dots,u_n$, т.е. их значения не изменяются при любых перестанов-

*) Предлагаемая статья является непосредственным продолжением предыдущей [I], поэтому в ней сохранена сквозная нумерация параграфов. Ссылки на параграфы I-6 не будут сопровождаться ссылкой на статью [I]. В ней остаются также все принятые в [I] обозначения.

ках аргументов. Это позволяет для упрощения изложения далее считать (без потери общности), что аргументы упорядочены по убыванию их значений, т.е. если

$$a = \max_i\{u_i\}, \quad b = \min_i\{u_i\}, \text{ то } \quad a = u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n = b. \tag{2}$$

7.I.3. СС - с т р о г о в о з р а с т а ю щ и е функции от каждого из их аргументов. Это вытекает из строгой положительности производной для любого из u_i. Действительно,

$$\partial S^p/\partial u_i = \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\Big)^{\frac{1}{p}-1} u_i^{p-1} > 0, \quad i = 1,\ldots, n. \tag{3}$$

7.I.4. СС - о д н о р о д н ы е функции первой степени, т.е. для любого $\lambda \in R^+$

$$S^p(\lambda u_1,\ldots,\lambda u_n) = \lambda S^p(u_1,\ldots, u_n). \tag{4}$$

Это позволяет без потери общности рассматривать СС с нормированными аргументами. Действительно, положим $\lambda = 1/u$, где $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$, тогда

$$S^p(u_1,\ldots, u_n) = uS^p(v_1,\ldots,v_n), \quad v_i = u_i/u, \tag{5}$$

т.е. СС с ненормированными аргументами отличается от СС после нормировки постоянным множителем.

7.I.5. СС обладают свойством а с с о ц и а т и в н о с т и, т.е. их величина не изменяется при замене любой подсовокупности аргументов их СС с тем же показателем. Действительно, выделим (без потери общности в силу симметричности) k первых аргументов ($k < n$), образуем СС $S_k^p = \big(\sum_{i=1}^{k} u_i^p\big)^{1/p}$ и заменим ею первые k аргументов в (I). Но

$$S^p(S_k^p, u_{k+1},\ldots,u_n) = \Big([S_k^p]^p + \sum_{i=k+1}^{n} u_i^p\Big)^{1/p} = \Big(\Big[\Big[\sum_{i=1}^{k} u_i^p\Big]^{1/p}\Big]^p +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} u_i^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\Big)^{1/p} \Rightarrow S^p(u_1,\ldots,u_n) = S^p(S_k^p, u_{k+1},\ldots,u_n). \tag{6}$$

Заменяя также аргументы $u_{k+1},\ldots,u_n$ их СС S_{n-k}^p, получим: $S^p(u_1,\ldots,u_n) = S^p(S_k^p, S_{n-k}^p)$. В общем случае разбивая аргументы на l непересекающихся наборов и обозначая их СС $S_1^p,\ldots,S_l^p$, имеем:

$$S^p(u_1,\dots,u_n) = S^p(S_1^p,\dots, S_l^p). \tag{7}$$

7.1.6. В вырожденном случае, когда $n = 1$,

$$S^p(u_1) = u_1 \tag{8}$$

и соответственно

$$S^q(S^p(u_1,\dots,u_n)) = S^p(u_1,\dots, u_n), \quad p,q \in R^+. \tag{9}$$

7.2. Зависимость СС от показателя степени p.

7.2.1. Непосредственно из определения СС вытекает, что

$$\lim_{p\to 0} S^p = 0, \quad p\le 0; \qquad \lim_{p\to 0} S^p = +\infty, \quad p\ge 0, \tag{10}$$

т.е. в точке $p=0$ СС S^p терпит разрыв второго рода. Действительно, при $p\to 0$ каждое $u_i^p \to 1$ и $\lim\limits_{p\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^p = n$, поэтому при $p\le 0$ $\lim\limits_{p\to 0} S^p = n^{-\infty} = 0$, а при $p\ge 0$ $\lim\limits_{p\to 0} S^p = n^{+\infty} = +\infty$.

7.2.2. При безграничном возрастании абсолютной величины p:

$$\lim_{p\to+\infty} S^p = a, \quad \lim_{p\to-\infty} S^p = b, \tag{11}$$

где a и b определяются (2). Действительно, разделим все u_i в первом случае на a, а во втором – на b, тогда

$$S^p = a\Big(\sum_{i=1}^{n} (u_i/a)^p\Big)^{1/p}, \quad S^p = b\Big(\sum_{i=1}^{n} (u_i/b)^p\Big)^{1/p}.$$

Поскольку в обоих случаях всегда имеются равные единице члены (u_1/a и u_n/b), то все неравные единице члены (в первом случае при $p\to+\infty$, во втором при $p\to-\infty$) стремятся к нулю, а сумма членов, равных единице, – к единице.

7.2.3. С ростом p функция S^p строго убывает на каждом из интервалов $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$. Для доказательства рассмотрим производную $\ln S^p$ по p:

$$d(\ln S^p)/dp = -\frac{1}{p^2}\ln \sum_{i=1}^{n} u_i^p + \frac{1}{p}\cdot\frac{\sum_i u_i^p \ln u_i}{\sum_i u_i^p} =$$

$$= \frac{1}{p^2 \sum_i u_i^p} \left(- \sum_i u_i^p \ln \sum_i u_i^p + \sum_i u_i^p \ln u_i^p\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; d(\ln S^p)/dp = \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i^p}{\sum_i u_i^p}\right) \ln \left(\frac{u_i^p}{\sum_{i=1}^{n} u_i^p}\right) < 0 \; . \qquad (12)$$

То, что логарифмическая производная (а следовательно,и производ - ная dS^p/dp) всюду о т р и ц а т е л ь н а на интервалах $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$, и доказывает строгое убывание S^p с ростом p на этих интервалах.

На границах интервалов:

$$(12) \Rightarrow \lim_{p\to 0} dS^p/dp = -\infty \; ; \quad \lim_{p\to\pm\infty} dS^p/dp = 0 \; . \qquad (13)$$

7.2.4. Значение $p=1$, которому соответствует $S^1 = \sum_{i=1}^{n} u_i$, при $p \in R^+$ делит область значения СС на две подобласти:

$$S^p \geq \sum_{i=1}^{n} u_i, \; p<1 \; ; \quad S^p \leq \sum_{i=1}^{n} u_i, \; p>1 \; ; \; p \in R^+. \qquad (14)$$

Для нормированных n-ок:

$$S^p \geq 1, \; p<1; \quad S^p \leq 1, \; p>1; \quad S^p = 1, \; p=1; \; p \in R^+. \qquad (15)$$

7.2.5. Пусть некоторая случайная величина ξ принимает конечное число значений $u_1, \ldots, u_n$ с распределением вероятностей $\omega_1(p), \ldots, \omega_n(p)$, где

$$\omega_i(p) = u_i^p \Big/ \sum_{i=1}^{n} u_i^p \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega_i(p) = 1, \qquad (16)$$

то энтропия этой случайной величины в согласии с (12) равна

$$H(p) = - \sum_{i=1}^{n} \omega_i(p) \ln \omega_i(p) = -p^2 d(\ln S^p)/dp. \qquad (17)$$

7.3. Зависимость СС от распределения значений ее аргументов. В согласии с пп. 7.1.2 и 7.1.4 СС определим на упорядоченных,нормированных n-ках чисел $(v_1, \ldots, v_n)$, $0 \leq v_i \leq v_{i+1} \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$, $v_i \in R^+$. Множество таких n-ок обозначим $\mathfrak{D}^n$.

7.3.1. В множестве $\mathfrak{D}^n$ выделим две n-ки: сосредоточенную D_T и равноэлементную (или равномерную) D_E

$$D_T:\ v_1 = 1,\ v_2 = v_3 = \ldots = v_n = 0, \tag{18}$$

$$D_E:\ v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 1/n\ , \tag{19}$$

которые представляют наиболее и наименее структурированный случай. Им соответствуют наименьшее и наибольшее значение энтропии:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} v_i \ln v_i:\quad H(D_T) = 0,\ \ H(D_E) = \ln n. \tag{20}$$

7.3.2. Покажем, что этим же n-кам D_T и D_E соответствуют и наименьшее и наибольшее значения СС. Пусть в n-ке $(v_1,\ldots,v_n)$ k ненулевых элементов. Построим функцию Лагранжа с коэффициентом λ:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi(S^p_k, v_1,\ldots,v_k,\lambda) = \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\Big)^{1/p} + \lambda\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} v_i\Big),\\
&\partial\Phi/\partial v_i:\ \lambda[\mathring{S}^p_k]^{p-1} = \mathring{v}_i^{p-1} = \mathring{v}_i^p/\mathring{v}_i = \sum_{i=1}^{k}\mathring{v}_i^p \Big/ \sum_{i=1}^{k}\mathring{v}_i = (\mathring{S}^p_k)^p \Rightarrow\\
&\Rightarrow \mathring{v}_i = (\mathring{S}^p)^{\frac{p}{p-1}},\quad i = 1,\ldots,k\ .
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Поскольку правая часть не зависит от i, то экстремум достигается при равенстве всех отличных от нуля $\mathring{v}_i$:

$$\mathring{v}_i = 1/k,\quad i=1,\ldots,k;\quad \mathring{S}^p_k = k^{(1/p)-1}, \tag{22}$$

т.е. $\mathring{S}^p_k$ – монотонная функция от k, принимающая (в зависимости от величины показателя p) наименьшее или наибольшее из значений на границах области (1,n) определения k, которым соответствуют n-ки D_T $(k=1)$ и D_E $(k=n)$:

$$S^p(D_T) = 1,\ \ S^p(D_E) = n^{\frac{1}{p}-1}\ . \tag{23}$$

Такие n-ки D_T и D_E и соответствующие им значения СС назовем граничными.

Для произвольной n-ки $D \in \mathfrak{D}^n$ имеем:

$$1 \le S^p(D) \le n^{(1/p)-1},\ 0<p<1;\ \ S^1(D)=1;\ n^{(1/p)-1} \le S^p(D) \le 1,\ p>1, \tag{24}$$

где знаки равенства для $p \ne 1$ соответствуют граничным n-кам (рис.1).

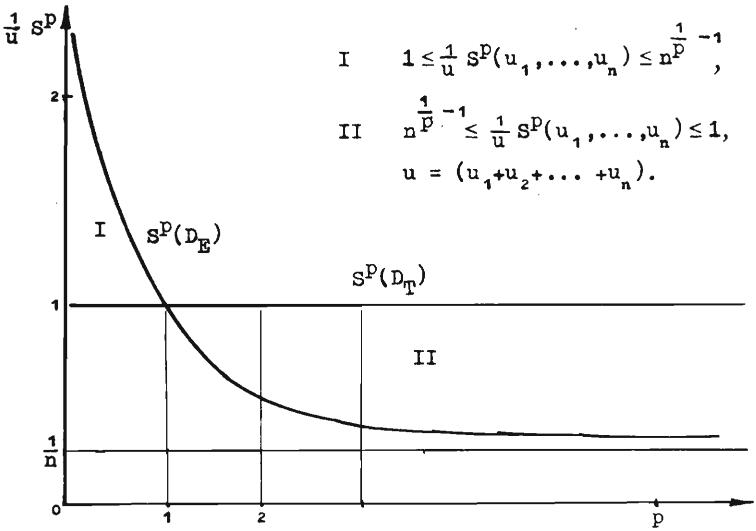

Рис. I

7.4. Зависимость СС от числа аргументов n .

7.4.I. В согласии с (23) СС $S^p(D_T)$ не зависит от n и для всех n равна I, а СС $S^p(D_E)$ связана с n степенной зависимостью. С ростом n область значения СС для $0<p<1$ уменьшается, а для других значений p увеличивается. Исключение составляют $p=0$ и $p=1$, при которых размеры области значения не зависят от n .

7.4.2. Для произвольной n-ки $D \in \mathfrak{D}^n$ зависимость от n будет тем сильнее, чем эта n-ка "ближе" к D_E . Понятие "близости" связано с определением отношения порядка на $\mathfrak{D}^n$, о чем речь впереди.

7.5. Упорядочение степенных сумм.

7.5.I. В согласии с п. 7.2.3 при фиксированных значениях n-ки аргументов величина СС тем больше, чем больше значение ее показателя степени, т.е.

$$p_2 > p_1 \Rightarrow S^{p_2}(D) > S^{p_1}(D), \quad D \in \mathfrak{D}^n , \tag{25}$$

а при фиксированных значениях показателя степени p для произвольной не граничной n-ки $D \in \mathfrak{D}^n$, имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &S^p(D_T) < S^p(D) < S^p(D_E)\,|_{p<1}; \quad S^p(D_E) < S^p(D) < S^p(D_T)\,|_{p>1}; \\ &S^p(D_T) = S^p(D) = S^p(D_E)\,|_{p=1};\ p \in R^+ . \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

В общем случае для произвольных n-ок $D_v, D_w \in \mathfrak{D}^n$ можно указать примеры, когда в зависимости от значений показателя степени p_1 и p_2 оба больше или оба меньше единицы, имеет место

$$S^{p_1}(D_v) < S^{p_1}(D_w) \quad \text{и} \quad S^{p_2}(D_v) > S^{p_2}(D_w),\ p_1, p_2 > 1, \text{либо } p_1, p_2 < 1. \quad (27)$$

Для не граничных n-ок можно привести

ПРИМЕР I. D_v: (8/12,3/12,1/12); D_w: (7/12,5/12,0); $p_1 = 3/2$; $p_2 = 3$;

$$S^{3/2}(D_v) = \tfrac{1}{12}(8^{3/2} + 3^{3/2} + 1)^{2/3} = \tfrac{1}{12}(22,6+5,2+1)^{2/3} = \tfrac{1}{12}\cdot 28,8^{2/3};$$

$$S^{3/2}(D_w) = \tfrac{1}{12}(7^{3/2} + 5^{3/2} + 0)^{2/3} = \tfrac{1}{12}(18,5+11,2+0)^{2/3} = \tfrac{1}{12}\cdot 29,7^{2/3};$$

$$S^{3}(D_v) = \tfrac{1}{12}(8^3 + 3^3 + 1)^{1/3} = \tfrac{1}{12}(512+27+1)^{1/3} = \tfrac{1}{12}\cdot 540^{1/3};$$

$$S^{3}(D_w) = \tfrac{1}{12}(7^3 + 5^3 + 0)^{1/3} = \tfrac{1}{12}(343+125+0)^{1/3} = \tfrac{1}{12}\cdot 468^{1/3};$$

т.е.

$$S^{3/2}(D_v) < S^{3/2}(D_w) \quad \text{и} \quad S^3(D_v) > S^3(D_v) .$$

При $p = 2$: $S^2(D_v) = \frac{1}{12}(8^2 + 3^2 + 1)^{1/2} = \frac{1}{12}\sqrt{74}$ и $S^2(D_w) = \frac{1}{12}(7^2 + 5^2 + 0)^{1/2} = \frac{1}{12}\sqrt{74}$, т.е. $S^2(D_v) = S^2(D_w)$.

Попытаемся найти такие подмножества $\mathfrak{D}^n$ и такие области значений показателя p, для которых свойство (27) не имело бы места.

7.5.2. Введем на парах n-ок $D_v, D_w \in \mathfrak{D}^n$ отношение $t \in \mathfrak{D}^n \times \mathfrak{D}^n$, такое, что для каждой пары $(D_v, D_w) \in t$:

$$\left.\begin{aligned} &D_v: (v_1, \dots, v_n),\ D_w: (w_1, \dots, w_n),\ \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\ &\forall i (v_{i-1} \geq v_i;\ w_{i-1} \geq w_i), \\ &D_v t D_w \Leftrightarrow \exists k,l (k < l,\ \Delta > 0,\ \forall i\ (i \neq k,l,\ w_i = v_i); \\ &w_k = v_k - \Delta;\quad w_l = v_l + \Delta . \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Можно видеть, что отношение t имеет место не для любой пары n-ок из $\mathfrak{D}^n$ и что отношение t не рефлексивно: $(\forall D \in \mathfrak{D}^n)(D, D) \notin t$;

не транзитивно, т.е. для произвольных $D_v, D_w, D_z \in \mathfrak{D}^n$ из $D_v t D_w$ и $D_w t D_z$ не следует $D_v t D_z$; не симметрично, т.е. $\neg(\forall D_v, D_w \in \mathfrak{D}^n)(D_v t D_w \Rightarrow D_w t D_v)$.

7.5.3. Будем говорить, что n-ки D_v и $D_w \in \mathfrak{D}^n$ находятся в отношении T тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность n-ок $D_1, \ldots, D_k \in \mathfrak{D}^n$ такая, что

$$D_v = D_1, \quad D_k = D_w \quad \text{и} \quad \forall i \; D_i t D_{i+1}, \quad i=1,\ldots,k-1. \tag{29}$$

Отношение T обладает следующими свойствами: не рефлексивно, т.е. $(\forall D \in \mathfrak{D}^n)((D,D) \notin t)$; транзитивно, т.е. для произвольных $D_v, D_w, D_z \in \mathfrak{D}^n$: $(D_v T D_w) \& (D_w T D_z) \Rightarrow D_v T D_z$; не симметрично, т.е. $\neg(\forall D_v, D_w \in \mathfrak{D}^n)(D_v T D_w \Rightarrow D_w T D_v)$.

7.5.4. Из введенных отношений t и T с учетом нормированности и упорядоченности элементов n-ок $D_v, D_w \in \mathfrak{D}^n$ непосредственно вытекают следующие соотношения между элементами n-ок D_v и D_w:

$$D_v t D_w \Rightarrow v_{k+1} \le w_k < v_k, \quad v_l < w_l \le v_{l-1} \Rightarrow v_k - v_l > w_k - w_l; \tag{30}$$

$$v_k + v_l = w_k + w_l; \tag{31}$$

$$D_v T D_w \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left|v_i - \frac{1}{n}\right| > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| w_i - \frac{1}{n}\right|, \tag{32}$$

т.е. у последующей n-ки D_w по сравнению с предшествующей D_v уменьшается среднее абсолютное отклонение.

7.5.5. В силу упорядоченности элементов n-ок D_v и D_w увеличение значений элементов n-ки D_w по сравнению с элементами n-ки D_v с теми же номерами должно сопровождаться уменьшением на такую же величину элементов n-ки D_v с меньшими номерами мест. Это позволяет установить достаточное и необходимое условие существования отношения T на n-ках D_v и $D_w \in \mathfrak{D}^n$.

Разобьем элементы n-ок на подпоследовательности g_h^+ и g_h^- ($h = 1,\ldots,r$) следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} v_1, v_2, \ldots, v_{k_1-1}, v_{k_1}, v_{k_1+1}, \ldots, v_{l_1-1}, v_{l_1}, \ldots, v_n \\ \;\text{VI}\;\;\; \text{VI} \qquad\;\; \text{VI} \qquad \wedge \quad \text{AI} \qquad\qquad \text{AI} \quad\; \vee \qquad\quad \text{AI} \\ \underbrace{w_1, w_2, \ldots, w_{k_1-1}}_{g_1^+}, \underbrace{w_{k_1}, w_{k_1+1}, \ldots, w_{l_1-1}}_{g_1^-}, \underbrace{w_{l_1}, \ldots}_{g_2^+} \ldots \underbrace{\ldots, w_n}_{g_r^-} \end{array}\right\} \tag{33}$$

Обозначим разности сумм элементов

$$d_1^+ = \sum_{i=1}^{k_1-1} (v_i - w_i), \qquad d_1^- = \sum_{i=k_1}^{l_1-1} (v_i - w_i);$$

$$
\left.
\begin{aligned}
d_1^+ &= \sum_{i=l_1}^{k_2-1} (v_i - w_i), & d_2^- &= \sum_{i=k_2}^{l_2-1} (v_i - w_i);\\
&\dots \quad \dots & &\dots \quad \dots\\
d_r^+ &= \sum_{i=l_{r-1}}^{k_r-1} (v_i - w_i), & d_r^- &= \sum_{i=k_r}^{l_r-1} (v_i - w_i).
\end{aligned}
\right\}
\tag{34}
$$

Из (33) можно видеть, что $d_h^+ > 0$, $d_h^- < 0$, $h = 1,\dots,r$, и что каждому d_h^+ соответствует d_h^- (поскольку $D_v \neq D_w$), а также, что

$$
\sum_{h=1}^{r} d_h^+ = \sum_{h=1}^{r} d_h^- . \tag{35}
$$

ЛЕММА 7.I. Необходимым и достаточным условием существования $D_v T D_w$ является выполнение следующего ряда соотношений:

$$
d_1^+ \geq d_1^-,\ d_2^+ + (d_1^+ - d_1^-) \geq d_2^-, \dots,\ d_r^+ + \sum_{h=1}^{r-1} (d_h^+ - d_h^-) = d_r^- . \tag{36}
$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из существования последовательности n-ок вида (29) (поскольку $D_v T D_w$), каждая из которых может быть получена из предыдущей уменьшением элемента с меньшим номером и увеличением (на ту же величину) элемента с большим номером. В принятых выше обозначениях уменьшающиеся элементы берутся при этом из подпоследовательностей со знаком "+", а увеличивающие элементы - из подпоследовательностей со знаком "-",что и приводит в конечном счете к соотношениям (36).

Достаточность. Нам требуется доказать, что из существования соотношений (36) следует $D_v T D_w$, т.е. что существует хотя бы одна последовательность n-ок вида (29), принадлежащих $\mathfrak{D}^n$ и попарно связанных отношением t. Иначе говоря, нужно показать, что такая последовательность может быть построена без нарушения упорядоченности элементов каждой из n-ок. Можно видеть, что таких нарушений не будет, если выбор номеров пар элементов k и l в каждом отношении t вести следующим образом. В качестве элемента с номером l выбираем элемент с наименьшим номером, для которого имеет место $v_i < w_i$, а в качестве элемента с номером k выбираем элемент с наибольшим номером, меньшим l , для которого $v_i > w_i$, повторив эту процедуру многократно,мы в конце концов получим n-ку D_w , поскольку из (36) следует сбалансированность величины, на которую уменьшаются элементы из подпоследовательностей со знаком "+" и величины, на которую увеличиваются элементы из последовательностей со знаком "-". □

Таким образом, лемма 7.I дает нам критерий, с помощью которого сравнительно просто можно установить связана ли данная пара n-ок из $\mathfrak{D}^n$ отношением T или нет.

7.5.6. Из леммы 7.I вытекают следующие свойства множества $\mathfrak{D}^n$.

7.5.6.I. Граничная n-ка $D_T \in \mathfrak{D}^n$ связана отношением T с каждой из n-ок $D \in \mathfrak{D}^n$.

7.5.6.2. Каждая n-ка $D \in \mathfrak{D}^n$ связана отношением T с граничной n-кой D_E .

7.5.6.3. Для любой не граничной n-ки $D \in \mathfrak{D}^n$ имеются: хотя бы одна n-ка $D_a \in \mathfrak{D}^n$, связанная с D отношением $(D_a tD)$, и хотя бы одна n-ка D_b, с которой D связана отношением (DtD_b) . Для граничных n-ок имеет место только $D_a tD_E$ и $D_T tD_b$.

7.5.6.4. Множество $\mathfrak{D}^n$ является относительно отношения T частично упорядоченным с наименьшим элементом D_E и наибольшим D_T .

7.5.6.5. Если задаться точностью ε определения значений элементов n-ок, то множество $\mathfrak{D}^n$ будет содержать конечное число элементов. Например, при $\varepsilon = 1/12$ и $n = 3$ мощность множества $\mathfrak{D}^n$ равна I9 (рис.2). На этом рисунке значения элементов умножены на I2 и стрелками указаны n-ки, соединенные отношением t .

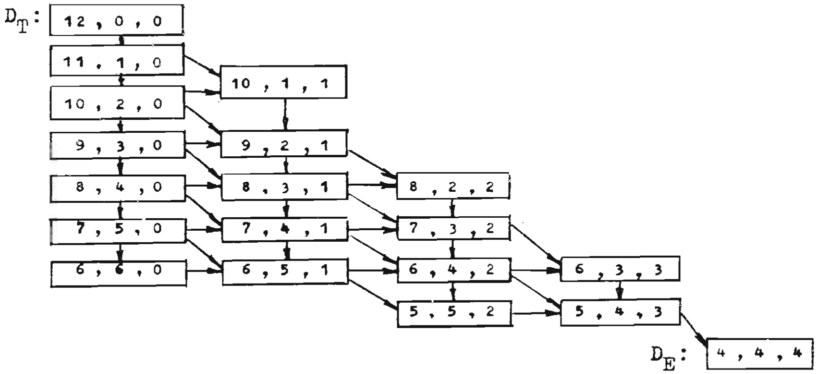

Рис. 2

7.6. Свойства СС от n-ок, связанных отношениями t и T .

7.6.I. Зафиксируем у произвольной n-ки $D \in \mathfrak{D}^n$ сумму каких-либо двух ее элементов v_k и v_l $(k<l)$:

$$v_k + v_l \doteq c, \quad v_k \doteq z \to v_l = c - z. \tag{37}$$

Полагая все элементы n-ки D, кроме v_k и v_l, неизмененными и придавая z значения на отрезке $[c/2, c]$, получим ряд n-ок $D(z) \in \mathfrak{D}^n$, в согласии с (28) попарно связанных отношением t:

$$c \ge z_1 > z_2 \ge c/2 \leftrightarrow D(z_1) t D(z_2). \tag{38}$$

СС от D(z) с учетом (6) равна:

$$S^p(z) = [(S_0^p)^p + z^p + (c-z)^p]^{1/p}, \quad c/2 \le z \le c, \quad p \in R^+, \tag{39}$$

где S_0^p - СС от всех элементов n-ки D, кроме v_k и v_l. Из производной $S^p(z)$ по z

$$dS^p(z)/dz = [z^{p-1} - (c-z)^{p-1}]/(S^p(z))^{p-1}, \quad p \in R^+, \tag{40}$$

непосредственно вытекают следующие свойства СС $S^p(z)$.

7.6.I.I. $S^p(z)$ – строго монотонная функция от z, возрастающая при $p>1$, убывающая при $p<1$ и независящая от z при $p = 1$:

$$dS^p(z)/dz > 0/p>1; \; dS^p(z)/dz < 0/p<1; \; dS^p(z)/dz=0/p=1. \tag{41}$$

7.6.I.2. При $z = c/2$ (т.е. $v_k = v_l$) достигается экстремум $S^p(z)$, что находится в согласии с (22), при $p<1$ экстремум является максимумом, а при $p>1$ - минимумом. При $z = c$ (т.е. $v_k = c$, $v_l = 0$) и при $p<1$ достигается наименьшее, а при $p>1$ – наибольшее значение $S^p(z)$.

7.6.I.3. Таким образом, с учетом (38)

$$c \ge z_1 > z_2 \ge c/2 \leftrightarrow D(z_1) t D(z_2) \to S^p(z_1) > S^p(z_2)|_{p>1};$$

$$S^p(z_1) < S^p(z_2)|_{p<1}. \tag{42}$$

7.6.I.4. Если рассматривать n-ку D(z) как значения, принимаемые некоторой случайной величиной $\xi(z)$, то ее энтропия равна:

$$H(z) = - \sum_{i=1}^{n} v_i \ln v_i = H_0 - z\ln z - (c-z)\ln(c-z), \tag{43}$$

где $H_0 = H(z) - v_k \ln v_k - v_l \ln v_l$, а

$$dH(z)/dz = \ln(c-z) - \ln z, \quad c/2 \le z \le c. \tag{44}$$

Откуда видно, что $z = c/2$ соответствует максимуму энтропии, что с ростом z энтропия уменьшается и при $z = c$ достигает наименьшего значения, т.е.

$$c \geq z_1 > z_2 \geq c/2 \Leftrightarrow D(z_1)\,t\,D(z_2) \Rightarrow H(z_1) < H(z_2) . \qquad (45)$$

7.6.2. Из (42) и (45), а также из свойств отношений t и T следует следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7.I. Отношению T на паре n-ок D_v, $D_w \in \mathfrak{D}^n$ соответствует отношение порядка на значениях степенных сумм и энтропии от этих n-ок:

$$D_v T D_w \Rightarrow S^p(D_v) > S^p(D_w)\,|_{p>1};\ S^p(D_v) < S^p(D_w)\,|_{p<1},\ p \in R^+;$$
$$H(D_v) < H(D_w). \qquad (46)$$

7.7. Оптимальное степенное суммирование (ОСС).

Пусть задана тройка $\langle A, P, \Omega \rangle$:

$$\left.\begin{array}{l} (a_1, \dots, a_N) = A \\ \Omega = \left\| \begin{array}{c} 1, \dots, 1 \\ \omega_{11}, \dots, \omega_{1N} \\ \dots\dots\dots \\ \omega_{M1}, \dots, \omega_{MN} \end{array} \right\| \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_M \end{pmatrix} = P, \end{array} \quad \begin{array}{l} a_i \in A,\ p_j \in P,\ \omega_{ji} \in \Omega, \\ a_i, p_j \in R^+,\ \omega_{ji} \in \{0,1\}, \\ \omega_{0i} \equiv 1,\ \ p_j \leq p_{j+1}, \\ j = 0,1,\dots,M; \\ i = 1,\dots,N, \end{array} \right\} \qquad (47)$$

где A – строка исходных элементов, P – упорядоченный по возрастанию столбец показателей степени СС, Ω – матрица связи, указывающая, что при $\omega_{ji} = 1$ элемент $a_i \in A$ может входить в наборы аргументов СС с показателем $p_j \in P$. Показатель p_0 допустим для любого набора элементов из A. Каждая строка матрицы Ω содержит не менее двух ненулевых элементов.

К тройке $\langle A, P, \Omega \rangle$ применим следующую процедуру свертки. Выделим какой-либо набор элементов $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, $a_{i_k} \in A$, $k = 1, \dots, n$, $1 < n \leq N$, и показатель степени $p_h \in P$ допустимый для каждого из a_{i_k}, т.е. $\forall k\ (\omega_{hi_k} = 1)$, $\omega_{hi_k} \in \Omega$. Образуем строку A', исключая из строки A элементы $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ и добавляя к ней элемент a_{N+1}, определяемый СС $a_{N+1} = S^{p_h}(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$. Определим также матрицу Ω', исключая из матрицы Ω столбцы с номерами $i_1, \dots, i_n$ и добавляя столбец с номером $N+1$, элементы которого

$a_{jN+1} = \mathop{\&}\limits_{k=1}^{n} \omega_{ji_k}$, $j = 0,1,\ldots, M$. К полученной тройке $\langle A', P, \Omega' \rangle$ вновь применим ту же процедуру и т.д., пока на шаге свертки L $(1 \le L \le N-1)$ не получим строку A^L, состоящую из одного элемента a_{N+L}, значение которого и является результатом свертки. Осуществимость такой пошаговой свертки гарантируется наличием у матрицы Ω строки, состоящей из одних единиц.

Свертки фиксированной тройки $\langle A, P, \Omega \rangle$, которым соответствуют наименьшие значения величины a_{N+L}, назовем <u>оптимальными</u>.

Нахождение оптимальных сверток относится к классу многовариантных задач, непосредственное решение которых последовательным перебором вариантов возможно лишь при небольших значениях параметров (N или M). Поэтому суть проблемы состоит в поиске путей уменьшения перебора, основываясь на свойствах степенных сумм и особенностях исходной тройки объектов $\langle A, P, \Omega \rangle$.

Автору пока не известно удовлетворительное решение этой проблемы, но и нет оснований считать ее неразрешимой.

§8. Свойства Н-операций, над семействами степенных функций

8.I.I. В согласии с §4 каждому типу Н-операций, определенных на данном Q_m-семействе, соответствует набор Н-операций, отличающихся количеством Н-функций (местностью), над которыми они выполняются. Если для общности ввести одноместные Н-операции ${}^1U_h$, такие, что для любой Н-функции z

$$ {}^1U_h(z) \equiv z, \quad h = p,0,1, \tag{1}$$

то получаем наборы Н-операций $\{{}^nU_h: n=1,\ldots,N\}$, $h=p,0,1,\ldots,m$.

8.I.2. Результатом применения Н-операции ${}^nU_h$ к n-ке степенных функций (СФ) из одного Q_m-семейства является СФ из того же Q_m-семейства, коэффициент C_h которой есть степенная сумма (СС) с показателем $1/d_h$ от n-ки коэффициентов исходных СФ (2.II),(4.24), т.е.

$$ C_h = S^{1/d_h}(c_1,\ldots,c_n) = \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i^{1/d_h}\Big)^{d_h}, \quad h=p,0,1,\ldots,m, \tag{2}$$

$$ d_p = d-1,\ d_0 = d,\ d_k = d - \sum_{j=1}^{k} q_j,\ k=1,\ldots,m-1,\ d_m = 1. \tag{3}$$

Из свойств СС (§7) вытекают следующие свойства Н-операций.

8.1.2.1. К о м м у т а т и в н о с т ь. Из симметричности СС (п.7.1.2) следует, что результат Н-операции не изменяется при любой перестановке $(k_1,\ldots, k_n)$ СФ в n-ке:

$$U_h(y_1,\ldots,y_n) = U_h(y_{k_1},\ldots,y_{k_n}), \quad h = p,0,1,\ldots,m . \tag{4}$$

8.1.2.2. А с с о ц и а т и в н о с т ь. Из п.7.1.5 следует, что если разбить n-ку исходных Н-функций на непересекающиеся наборы, то

$$U_h(y_1,\ldots,y_n) = U_h(U_h(y_{k_1},\ldots,y_{n_1}),\ldots,U_h(y_{k_l},\ldots,y_{n_l})). \tag{5}$$

8.1.2.3. Если в Q_m-семейство включить нулевую СФ Λ с коэффициентом $c_0 = 0$, то

$$^{n}U_h(\Lambda,\ldots,\Lambda) = \Lambda, \quad n = 1,\ldots, N; \quad h = p,0,1,\ldots, m , \tag{6}$$

$$^{n+1}U_h(y_1,\ldots,y_n,\Lambda) = {}^{n}U_h(y_1,\ldots,y_n), \; n= 1,\ldots,N; \; h= p,0,\ldots,m. \tag{7}$$

8.1.2.4. В общем случае ни одна пара Н-операций разных типов не обладает свойством дистрибутивности, т.е.

$$U_g(U_h(y_1,y_2),y_3) \neq U_h(U_g(y_1,y_3),U_g(y_2,y_3)), \quad g \neq h; \; g,h \in \{p,s\}. \tag{8}$$

8.2. Выясним, как соотносятся между собой величины коэффициентов $C_p, C_0, C_1,\ldots, C_m$ Н-функций, полученные в результате выполнения Н-операций $U_p, U_0, U_1,\ldots, U_m$ над одной и той же n-кой Н-функций из одного Q_m-семейства, с коэффициентами $c_1,\ldots,c_n$, $\sum_{i=1}^{n} c_i = c$, в согласии с (4.3), (4.11), (4.19), (4.24) и § 7.

8.2.1. В случае, когда n-ка $D = D_T$ (т.е. $c_1 = c$, $c_2 = \ldots = c_n = 0$), для любого Q_m-семейства

$$D = D_T \Rightarrow C_p = C_0 = C_1 = \ldots = C_m = c . \tag{9}$$

8.2.2. Для произвольной n-ки D $(D \neq D_T)$ для любого Q_m-семейства:

$$D \neq D_T \Rightarrow d = d_0 > d_p = d-1 \Rightarrow C_0 > C_p , \tag{10}$$

$$D \neq D_T \Rightarrow d = d_0 > d_1 > \ldots > d_{k-1} > d_k > \ldots > d_m = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_0 > C_1 > \ldots > C_{k-1} > C_k > \ldots > C_m . \tag{11}$$

8.2.3. Соотношения между C_p и C_m полностью определяются величиной $d(Q_m)$:

$$(D \neq D_T) \& (d<2) \Rightarrow d_m > d_p \Rightarrow C_m > C_p; \qquad (12)$$

$$(D \neq D_T) \& (d>2) \Rightarrow d_p > d_m \Rightarrow C_p > C_m; \qquad (13)$$

$$(D = D_T) \& (d=2) \Rightarrow d_p = d_m \Rightarrow C_p = C_m . \qquad (14)$$

8.2.4. Соотношения между C_p и C_k при $d(Q_m) \leq 2$ определяются однозначно, а при $d(Q_m) > 2$ определяются величиной

$$\delta_k = d - d_k - \sum_{j=k+1}^{m} q_j , \quad k = 1,\ldots,m-1, \qquad (15)$$

$$(D \neq D_T) \& (d \leq 2) \Rightarrow d_k > d_p \Rightarrow C_k > C_p , \; k = 1,\ldots, m-1, \qquad (16)$$

$$(D \neq D_T) \& (d > 2)(\delta_k < 1) \Rightarrow d_k > d_p \Rightarrow C_k > C_p , \; k=1,\ldots,m-1, \qquad (17)$$

$$(D \neq D_T) \& (d>2)(\delta_k > 1) \Rightarrow d_p > d_k \Rightarrow C_p > C_k , \; k=1,\ldots,m-1, \qquad (18)$$

$$(D \neq D_T) \& (d>2)(\delta_k = 1) \Rightarrow d_p = d_k \Rightarrow C_p = C_k , \; k=1,\ldots,m-1. \qquad (19)$$

8.2.5. Области определения величин коэффициентов C_h выделяются в согласии с п.7.3.2 граничными n-ками D_T и D_E (рис.3):

$$d<2 \Rightarrow S^{1/d_p(D_E)} < S^{1/d_p(D)} < S^{1/d_p(D_T)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_p(D_E) < C_p(D) < C_p(D_T), \qquad (20)$$

$$d>2 \Rightarrow S^{1/d_p(D_T)} < S^{1/d_p(D)} < S^{1/d_p(D_E)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_p(D_T) < C_p(D) < C_p(D_E), \qquad (21)$$

$$d=2 \Rightarrow S^{1/d_p(D_E)} = S^{1/d_p(D)} = S^{1/d_p(D_T)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_p(D_E) = C_p(D) = C_p(D_T); \qquad (22)$$

$$S^{1/d_o(D_T)} < S^{1/d_o(D)} < S^{1/d_o(D_E)} \Rightarrow C_o(D_T) < C_o(D) < C_o(D_E), \qquad (23)$$

$$S^{1/d_k(D_T)} < S^{1/d_k(D)} < S^{1/d_k(D_E)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_k(D_T) < C_k(D) < C_k(D_E), \; k = 1,\ldots, m-1, \qquad (24)$$

$$S^{1/d_m}(D_T) = S^{1/d_m}(D) = S^{1/d_m}(D_E) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_m(D_T) = C_m(D) = C_m(D_E) = c. \qquad (25)$$

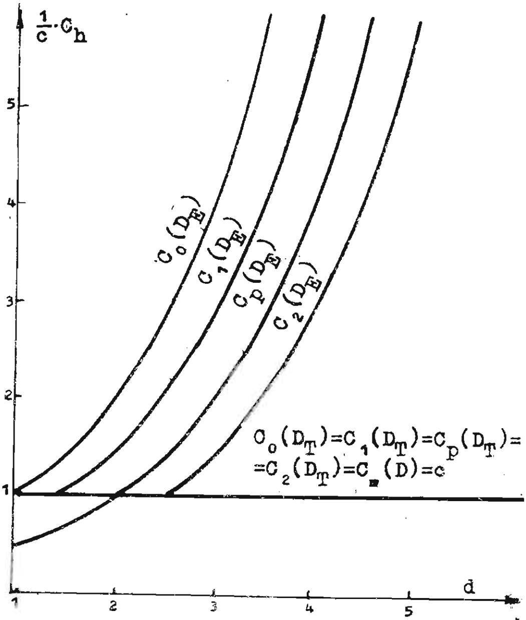

Рис. 3

8.3. До сих пор для простоты рассмотрения мы не принимали во внимание варианты размещения аргументов Н-функций (2.I) и считали, по сути, что имеется один единственный вариант, когда аргументам на первых k местах соответствуют ограничения вида (3.7), а остальным $m-k$ – вида (3.6). При рассмотрении отдельных Н-операций нам этого было достаточно, так как в силу симметричности Н-функций (4) всегда можно расставить аргументы в желаемом порядке. Однако при сопоставлении р а з л и ч н ы х Н-операций над одной и той же m-кой Н-функций мы лишаемся этой возможности, так как для различных Н-операций могут потребоваться и различные варианты расстановки аргументов. А это означает, что при одном и том же значении k могут быть различные значения показателя степени d_k, число которых может доходить до $V_k = m!/(m-k)!\,k!$, что соответствует случаю, когда среди всех m показателей степени Н-функций $q_1, \ldots, q_m$ нет совпадающих.

Таким образом, мы уже не можем сказать, что $d_k > d_{k+1}$, так как это справедливо, вообще говоря, лишь при одном и том же варианте размещения аргументов (с номерами $j = k+1, k+2, \ldots, m$). Будем писать (d_k, W_k), где $W_k = 1, \ldots, V_k$ указывает на вариант размещения аргументов. Условимся нумеровать эти варианты так, чтобы W_k располагались в возрастающем порядке.

§9. Свойства степенных функций и Н-операций над ними

Как и ранее, нас будут интересовать степенные функции (СФ) вида (4.2)

$$y_k = c_k \prod_{j=1}^{m} x_{kj}^{-q_j}, \quad c_k, q_j, x_{kj} \in R^+, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{1}$$

и их Q_m-семейства. При описании их свойств будем широко использовать геометрическую форму представления. Особенно при изложении зависимостей между Н-оптимальными значениями СФ и их аргументов. Доказательства очевидных свойств будем, как правило, опускать.

9.0. Общие свойства СФ. На $(R^+)^m$ СФ (I) относительно каждого из ее аргументов строго убывает, обладает строго возрастающей логарифмической производной, а следовательно, и непрерывна и обладает строго возрастающей производной.

9.I. Свойства, характеризующие роль коэффициента c_k.

9.I.I. В пространстве Евклида E^{m+1} СФ (I) представляет собой поверхность, ближайшая к началу координат ($y = x_1 = \ldots = x_m = 0$), точка B_k $(y_k^B, x_{k1}^B, \ldots, x_{km}^B)$ которой находится от него на расстоянии

$$b_k = c_k^{1/d} d^{1/2} \prod_{j=1}^{m} q_j^{-q_j/2d}, \quad d = \sum_{j=1}^{m} q_j + 1 . \tag{2}$$

9.I.2. Все ближайшие точки СФ из одного Q_m-семейства лежат на одной прямой

$$y = q_1^{-1/2} x_1 = q_2^{-1/2} x_2 = \ldots = q_m^{-1/2} x_m . \tag{3}$$

9.I.3. Средняя точка S_k СФ, образованная пересечением ее с прямой

$$y = x_1 = \ldots = x_m , \tag{4}$$

находится от начала координат на расстоянии:

$$S_k = (m+1)^{1/2} c_k^{1/d} . \tag{5}$$

9.I.4. Любые две различные СФ из одного Q_m-семейства в области определения $(R^+)^{m+1}$ не имеют общих точек.

9.I.5. Если в согласии с п.3.5.I y_k интерпретировать как Н-эффективность некоторого объекта a_k, а x_{kj} – как количество выделенного ему Н-ресурса вида j, то коэффициент c_k можно интерпретировать как удельную Н-эффективность, т.е. Н-эффективность объекта a_k, когда ему отведено по единице каждого из видов Н-ресурсов.

9.2. Свойства, характеризующие роль показателей степени.

9.2.1. Если все показатели степени СФ $q_j = 0$ $(j = 1,\ldots,m)$, то СФ соответствует в E^{m+1} плоскость $y = c_k$. С ростом значений q_j эта плоскость деформируется и поворачивается по часовой стрелке вокруг точки $(y = c_k,\ x_j = 1;\ j = 1,\ldots,m)$, далее называемой у з л о в о й.

9.2.2. Каждый из показателей степени q_j равен значению частной производной СФ в средней точке, взятой с обратным знаком:

$$q_j = -(\partial y/\partial x_j)_s = \operatorname{tg}\varphi_j^s = OY^s/OX_j^s,\quad j=1,\ldots,m, \tag{6}$$

где φ_j^s - угол между касательной к СФ в средней точке и осью OX_j, а OY^s и OX_j^s - отрезки, отсекаемые этой касательной на осях OY и OX_j. Длины этих отрезков равны

$$OY^s = (q_j + 1)c_k^{1/d};\quad OX_j^s = (q_j^{-1} + 1)c_k^{1/d},\ j=1,\ldots,m. \tag{7}$$

9.2.3. Значения частных производных в ближайшей точке СФ равны

$$(\partial y/\partial x_j)_b = -q_j^{1/2},\quad j = 1,\ldots,m. \tag{8}$$

9.2.4. Запишем СФ в виде $\prod_{j=0}^{m} x_j^{q_j} = c$, $x_0 = y$, $q_0 = 1$, принятом для записи физических законов. Поскольку y и x_j интерпретируются нами как физические величины (п.1.2.2), то q_j являются числами, определяющими размерность c относительно системы основных физических величин $\{x_0, x_1,\ldots,x_m\}$, а суммарный показатель степени d (4.3) определяет по Бартини-Кузнецову [2] димезиональный объем $d = \sum_{j=0}^{m} q_j$.

9.3. Свойства C^m-семейств - множеств m-аргументных СФ с одним и тем же значением коэффициента c.

9.3.1. Любые две одноаргументные СФ из одного C^1-семейства в области определения $(0 < x < \infty)$ не имеют других общих точек, кроме узловой $(y = c,\ x = 1)$. По индукции это свойство доказывается и для многоаргументных СФ.

9.3.2. Узловая точка $(y = c, x_1 = \ldots = x_m = 1)$ - единственная общая для всех СФ из одного C^m-семейства точка в области определения $(0 < x_j < \infty,\ j = 1,\ldots,m)$.

9.4. Соотношения между Н-оптимальными значениями исходной n-ки СФ из данного Q_m-семейства и результирующих СФ (из того же Q_m-семейства), получающихся при применении Н-операций U_h^m ($h = p, 0, 1, \dots, m$).

ЛЕММА 9.I. Н-оптимальным значениям исходных и результирующей СФ для любой из Н-операций U_h^m при фиксированных границах $(X_1, \dots, X_m)$ области определения этих СФ соответствуют точки в пространстве E^{m+1}, лежащие на одной прямой.

Действительно, поставим в соответствие каждой из Н-операций U_p^m, U_0^m, U_m^m и U_k^m ($k = 1 \div m-1$) в пространстве E^{m+1} прямую с тем же индексом:

$$P_p: \quad \left. \begin{aligned} & y = Y_p(X_1, \dots, X_m), \\ & x_j = \alpha_p X_j, \quad \alpha_p \in R, \quad j = 1, \dots, m; \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

$$P_0: \quad \left. \begin{aligned} & y = \alpha_0 Y_0(X_1, \dots, X_m), \quad \alpha_0 \in R, \\ & x_j = \alpha_0 X_j, \quad j = 1, \dots, m; \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

$$P_m: \quad \left. \begin{aligned} & y = \alpha_m Y_m(X_1, \dots, X_m), \quad \alpha_m \in R, \\ & x_j = X_j, \quad j = 1, \dots, m; \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

$$P_k: \quad \left. \begin{aligned} & y = \alpha_k Y_k(X_1, \dots, X_m), \quad \alpha_k \in R, \quad k = 1, \dots, m-1, \\ & x_j = \alpha_k X_j, \quad j = k+1, \dots, m, \\ & x_j = X_j, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Полагая параметр $\alpha_h = (c_i/C_h)^{1/d_h}$ ($h = p, 0, m, k$) и учитывая соотношения (4.25)-(4.30), нетрудно убедиться в том, что эти прямые проходят через точки $H_i^h(\overset{\circ}{y}{}_i^{(h)}, \overset{\circ}{x}{}_{i1}^{(h)}, \dots, \overset{\circ}{x}{}_{im}^{(h)})$, $i = 1, \dots, n$, и $H^h(Y_h, X_1, \dots, X_m)$ с соответствующим значением индекса h ($h = \{p, 0, m, k\}$). □

Условимся называть прямые P_h ($h = p, 0, 1, \dots, m$) Н-прямыми. Рассмотрим некоторые их свойства.

9.4.I. Каждая Н-прямая пересекает любую из исходных и результирующую СФ только в одной точке, которую будем называть оптимальной.

действительно, пусть таких точек будет две: $(\overset{\circ}{y}_i^{(h)}, \overset{\circ}{x}_{i1}^{(h)}, \ldots$
$\ldots, \overset{\circ}{x}_{im}^{(h)})$ и $(\overset{*}{y}_i, \overset{*}{x}_{i1}, \ldots, \overset{*}{x}_{im})$. Но тогда в согласии с (9) существует такое значение $\overset{*}{\alpha}_p$ параметра α_p, при котором

$$\overset{*}{y}_i = Y_p, \quad \overset{*}{x}_{ij} = \overset{*}{\alpha}_p X_j, \qquad j = 1, \ldots, m . \tag{13}$$

Но тогда

$$(13) \Rightarrow \overset{*}{\alpha}_p = \overset{*}{x}_{ij}/X_j (j=1, \ldots, m) \Rightarrow \overset{*}{\alpha}_p^{1-d} = \prod_{j=1}^{m} \overset{*}{x}_{ij}^{-q_j} / \prod_{j=1}^{m} X_j^{-q_j} \overset{(1)}{=} (\overset{*}{y}_i/Y_p) \times$$

$$\times (C_p/c_i) \overset{(13)}{=} C_p/c_i \overset{(4.11)}{\Rightarrow} \overset{*}{\alpha}_p = (c_i/C_p)^{1/d_p} = \overset{\circ}{x}_{ij}^{(p)}/X_j \Rightarrow \overset{*}{x}_{ij} = \overset{\circ}{x}_{ij}^{(p)},$$
$$j = 1, \ldots, m,$$

так как и $\overset{*}{y}_i = Y_p = \overset{\circ}{y}_i^{(p)}$, то обе точки совпадают.

Аналогично, в согласии с (10)-(12) и вводя обобщенный индекс $s = 0, k, m$, имеем:

$$\overset{*}{\alpha}_s = \overset{*}{y}_i/Y_s, \tag{14}$$

$$\overset{*}{\alpha}_s = \overset{*}{x}_{ij}/X_j, \quad j = s+1, \ldots, m, \tag{15}$$

$$\overset{*}{x}_{ij} = X_j, \qquad j = 1, \ldots, s; \tag{16}$$

$$(15) \Rightarrow \overset{*}{\alpha}_s^{1-d_s} = \prod_{j=1}^{s} \overset{*}{x}_{ij}^{-q_j} / \prod_{j=1}^{s} X_j^{-q_j} \overset{(16)}{=} \prod_{j=1}^{m} \overset{*}{x}_{ij}^{-q_j} / \prod_{j=1}^{m} X_j^{-q_j} \overset{(1)}{=} (\overset{*}{y}_i/Y_s) \times$$

$$\times (C_s/c_i) \overset{(14)}{=} \overset{*}{\alpha}_s C_s/c_i \Rightarrow \overset{*}{\alpha}_s = (c_i/C_s)^{1/d_s} \overset{(4.31)}{=} \overset{\circ}{y}_i^{(s)}/Y_s = \overset{\circ}{x}_{ij}^{(s)}/X_j$$

$$(j=s+1, \ldots, m) \underset{(14,15)}{\overset{(16)}{\Rightarrow}} \overset{*}{y}_i = \overset{\circ}{y}_i^{(s)}, \ \overset{*}{x}_{ij} = \overset{\circ}{x}_{ij}^{(s)}, \quad j = 1, \ldots, s,$$
$$s = 0, 1, \ldots, m .$$

Так же точно можно доказать это свойство и для результирующей СФ. □

9.4.2. Н-прямые пересекают координатные плоскости в следующих точках:

P_p в точке $G^p(y = Y_p, x_1 = 0, \ldots, x_m = 0)$ на оси OY;

P_0 в точке $G^0(y = 0, x_1 = 0, \ldots, x_m = 0)$ - начало координат;

P_m в точке $G^m(y=0,\ x_1=X_1,\dots,x_m=X_m)$ – на плоскости $y=0$;

P_k в точке $G^k(y=0, x_1=0,\dots,x_k=0, x_{k+1}=X_{k+1},\dots,x_m=X_m)$, $k=1\div m-1$.

Эти точки назовем о п о р н ы м и. Назовем опорными также и расстояния до оптимальных от соответствующих опорных точек.

9.4.3. Соответствующие однородным Н-операциям Н-прямые: P_p, нормальная к оси ОУ; P_0, проходящая через начало координат, и P_m, параллельная оси ОУ, лежат в одной плоскости:

$$x_1/X_1 = x_2/X_2 = \dots = x_m/X_m, \tag{17}$$

проходящей через ось ОУ и прямую P_m.

Соответствующие неоднородным Н-операциям Н-прямые P_k $(k=1,\dots$ $\dots,m-1)$ лежат в плоскости, проходящей через прямую P_m. Таким образом, Н-прямая P_m пересекается со всеми Н-прямыми: с P_p в точке $(y=Y_p, x_1=X_1,\dots,x_m=X_m)$, с P_0 в точке $(y=Y_0, x_1=X_1,\dots,x_m=X_m)$, с P_k в точке $(y=Y_k, x_1=X_1,\dots,x_m=X_m)$. Н-прямые P_p и P_0 пересекаются в точке $(y=Y_p,\ x_1=(C_p/C_0)X_1,\dots,\ x_m=(C_p/C_0)X_m)$. Н-прямые P_p и P_0 с Н-прямой P_k в общем случае не пересекаются.

9.4.4. Н-прямые P_h, $h=p,0,1,\dots,m$, полностью определяются граничной m-кой $(X_1,\dots,X_m)$ и величиной результирующих функций Y_h $(h=p,0,1,\dots,m)$. Задавая различные значения $X_1,\dots,X_m$ и Y_h, получим с е м е й с т в а Н-прямых $\mathbb{P}_h$ $(h=p,0,1,\dots,m)$. Каждое из этих семейств $\mathbb{P}_h$ $(h\in\{p,0,1,\dots,m\})$ покрывает все точки пространства $(R^+)^{m+1}$, т.е. для произвольной точки $(y,x_1,\dots,x_m)\in$ $\in(R^+)^{m+1}$ всегда найдется Н-прямая $P_h\in\mathbb{P}_h$ $(h\in\{p,0,1,\dots,m\})$, проходящая через эту точку. Эта Н-прямая к тому же будет единственной в каждом семействе $\mathbb{P}_h$.

9.4.5. У каждой из Н-прямых значения индекса j координат опорной g_j и оптимальных $\overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{ij}$ точек принадлежат к одной из двух групп: $I\subset\{0,1,\dots,m\}$ или $II\subseteq\{0,1,\dots,m\}$

$$\text{при } j\in I:\ g_j^{(h)} = \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{ij},\quad i=0,1,\dots,n, \tag{18}$$

$$\text{при } j\in II:\ g_j^{(h)} = 0,\quad \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{ij} = b_i^{(h)}X_j,\quad i=0,1,\dots,n, \tag{19}$$

$$\text{где } b_i^{(h)} = (c_i/C_h)^{1/d_h},\quad \sum_{i=1}^{n} b_i^{(h)} = 1, \tag{20}$$

$j = 0$ соответствует координате по оси ОУ, т.е. $\overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{i0} = \overset{\circ}{y}{}^{(h)}_{i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, а $i = 0$ соответствует результирующей СФ, т.е. $\overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{0j} = X_j$, $\overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{00} = X^{(h)}_0 = Y_h$.

Эти свойства непосредственно вытекают из сопоставления координат опорной и оптимальных точек и из свойств Н-оптимальных значений СФ, установленных в §4.

9.4.6. ЛЕММА 9.2. Для каждой Н-прямой сумма опорных расстояний l^h_i для исходных функций равна опорному расстоянию L^h для результирующей функции, т.е.

$$L^h = \sum_{i=1}^{m} l^h_i , \quad h = p, 0, 1, \ldots, m . \tag{21}$$

Действительно, пусть Z_j и $z^{(h)}_{ij}$ – j-е составляющие L^h и l^h_i, тогда в согласии с п.9.4.5 имеем

$$Z_j \in \{0, X_j\}, \quad z^{(h)}_{ij} \in \{0, \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{ij}\} \quad \text{и} \quad Z_j = 0 \Leftrightarrow z^{(h)}_{ij} = 0, \tag{22}$$

$$j = 0, 1, \ldots, m; \quad i = 1, \ldots, n; \quad h = p, 0, 1, \ldots, m ,$$

и расстояния L^h и l^h_i запишутся в виде степенных сумм с показателем 2 так:

$$L^h = S^2(Z^{(h)}_0, Z_1, \ldots, Z_m), \quad h = p, 0, 1, \ldots, m , \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l^h_i = \sum_{i=1}^{n} S^2(z^{(h)}_{i0}, z^{(h)}_{i1}, \ldots, z^{(h)}_{im}), \quad h = p, 0, 1, \ldots, m . \tag{24}$$

В согласии с (19) заменим $z^{(h)}_{ij}$ на $b^{(h)}_i Z_j$ (при этом, естественно, нулевые члены останутся нулевыми и не повлияют на результат):

$$\sum_{i=1}^{n} l^h_i = \sum_{i=1}^{n} S^2(b^{(h)}_i Z^{(h)}_0, b^{(h)}_i Z_1, \ldots, b^{(h)}_i Z_m) =$$

$$= S^2(Z^{(h)}_0, Z_1, \ldots, Z_m) \sum_{i=1}^{n} b^{(h)}_i \overset{(20)}{=} S^2(Z^{(h)}_0, Z_1, \ldots, Z_m) \overset{(23)}{=} L^h . \square$$

9.4.7. ТЕОРЕМА 9.1. Пусть заданы: граничная m-ка $(X_1, \ldots, X_m)$, функция из Q_m-семейства $\mathbf{Q}_m$:

$$Y = C \prod_{j=1}^{m} X_j^{-q_j}, \quad Y \in \mathbf{Q}_m \tag{25}$$

и n-ка функций из того же Q_m-семейства

$$y_i = c_i \prod_{j=1}^{m} x_{ij}^{-q_j}, \quad y_i \in \mathbf{Q}_m, \quad i = 1,\dots,n, \tag{26}$$

тогда функция Y будет результатом применения Н-операции U_h^m

$$U_h^m (y_1,\dots, y_n) = Y, \quad h \in \{p, 0, 1, \dots, m\},$$

если и только если сумма опорных расстояний l_i^h (по Н-прямой $P_h(Y, X_1,\dots, X_m) \in \mathbf{P}_h$) для функций (26) равна опорному расстоянию L^h для функции (25), т.е.

$$L^h(Y, X_1,\dots,X_m) = \sum_{i=1}^{n} l_i^h(y_i^{(h)}, x_{i1}^{(h)},\dots, x_{im}^{(h)}) . \tag{27}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость (27) была доказана в лемме 9.2. Для доказательства достаточности нужно, чтобы из (27) следовало бы

при $h = p$: $\quad \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}_{ij}^{(p)} = X_j, \quad \overset{o}{y}_1^{(p)} = \dots = \overset{o}{y}_n^{(p)} = Y,$ (28)

при $h = 0$: $\quad \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}_{ij}^{(o)} = X_j, \quad \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{y}_i^{(o)} = Y,$ (29)

при $h = k$: $\quad \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}_{ij}^{(k)} = X_j, j = k+1 \div m-1, \ \overset{o}{x}_{ij}^{(k)} = X_j, \ j = 1,\dots,k,$ (30)

$\quad \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{y}_i^{(k)} = Y, \quad i = 1,\dots,n,$

при $h = m$: $\quad \overset{o}{x}_{ij}^{(m)} = X_j, \ j = 1 \div m, \ i=1 \div n, \quad \sum_{i=1}^{n} \overset{o}{y}_i^{(m)} = Y .$ (31)

Обобщим все эти случаи, у каждой из Н-прямых отнесем координаты точек ее пересечения со СФ $y_1,\dots,y_n$ и Y к одной из двух групп: $I \subset \{0, 1, \dots, m\}$ или $II \subseteq \{0, 1, \dots, m\}$ таких, что при

$$j \in \mathrm{I}: \ \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{ij} = X_j, \quad \overset{\circ}{y}{}^{(h)}_{i} \rightleftharpoons \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{i0} = X_0 \rightleftharpoons Y, \ i = 1,\dots,n; \tag{32}$$

$$j,l \in \mathrm{II}, \ l \neq j: \ \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{ij} / \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{il} = \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{0j} / \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{0l} \rightleftharpoons X_j/X_l \rightleftharpoons a_{jl}, \ i = 1 \div n. \tag{33}$$

Возможность такого представления непосредственно следует из уравнений Н-прямых (9)-(12).

Если, как и ранее, условие (27) записать в виде СС с показателем 2, то

$$S^2(X_0,X_1,\dots,X_m) = \sum_{i=0}^{n} S^2(\overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{i0}, \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{i1}, \dots, \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{im}) \overset{(33)}{\Rightarrow} X_l S^2(a_{0l},$$

$$a_{1l},\dots,a_{ml}) = \sum_{i=0}^{n} \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{il} S^2(a_{0l},a_{1l},\dots,a_{ml}) \Rightarrow X_l = \sum_{i=0}^{n} \overset{\circ}{x}{}^{(h)}_{il} .$$

Полагая поочередно все допустимые значения $l \in \mathrm{II}$, получаем все равенства (28)-(31), а поскольку у любых двух функций из одного Q_m-семейства нет общих точек, то, следовательно, $Y = Y_h$ $(h \in \{p, 0, 1, \dots, m\})$ и функция (25) является результирующей для данной Н-операции. □

Таким образом, мы доказали уникальность свойств Н-прямых.

Литература

1. КОСАРЕВ Ю.Г. О математической модели гармонических систем. I. -В кн.: Математическое обеспечение вычислительных систем из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып. 96). Новосибирск, 1983, с. 3-28.

2. КУЗНЕЦОВ П.Г. Искусственный интеллект и разум человеческой популяции. Приложение к кн.: Е.А.Александров. Основы теории эвристических решений. М., 1975, с. 212-248.

Поступила в ред.-изд.отд.
31 октября 1983 года