МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)

1988 год Выпуск 125

УДК 519.876

ИССЛЕДОВАНИЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ГАРМОНИЧНЫХ СИСТЕМ

Ю.Г. Косарев

В данной работе продолжаются исследования свойств гармоничных систем, начатые в [1-3]. В §1 уточняется исходная концепция и обсуждаются свойства обобщенной модели гармоничных систем. В §2 изучаются ситуации, возникающие при нарушениях гармоничности. В §3 анализируются случаи взаимозаменяемых ресурсов.

§1. Основные понятия и свойства

1.1. Рассмотрим введенные в [3] неявные H-функции - степенные функции вида:

$$f_i: \quad \prod_{j\in J_0} x_{ij}^{q_j} \cdot \prod_{j\in J_1} x_{ij}^{q_j} = a_i; \quad a_i, q_j, x_{ij} \in R^+, \qquad (1)$$

здесь i - индекс H-функции; j - индекс переменной. Множество индексов переменных обозначим через J ,а число переменных - через $|J| \rightleftharpoons m+1$, где m - число независимых переменных. Переменные x_{ij} относятся к одному из двух типов: нулевому $(j\in J_0)$ и первому $(j \in J_1)$, $J_0 \cup J_1 = J$, $J_0 \cap J_1 = \emptyset$. Над n-ками переменных нулевого типа определена процедура <u>суммирования</u>:

$$\Sigma: \quad x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{nj}, \quad j \in J_0, \qquad (2)$$

а над n-ками переменных первого типа определено отношение уравнивания (эквализации):

$$E: \quad x_{1j} = x_{2j} = \ldots = x_{nj}, \quad j \in J_1. \tag{3}$$

В тех случаях, когда в (3) значение переменной x_{ij} больше верхней границы области ее значения $\hat{x}_{ij}$, в (3) вместо x_{ij} условимся писать $\hat{x}_{ij} + \Delta x_{ij}$, где $\Delta x_{ij} \rightleftharpoons x_{ij} - \hat{x}_{ij}$.

Совокупность H-функций с одним и тем же набором показателей степени $(q_1, \ldots, q_{m+1})$ и одним и тем же распределением переменных по типам образует семейство H-функций.

Таким образом, каждая H-функция обладает двумя наборами свойств: семейными, общими для всех H-функций семейства, и индивидуальными, к которым относятся величина коэффициента и область определения H-функции - подобласть $(R^+)^{m+1}$. Далее, H-функции, область определения которых совпадает с $(R^+)^{m+1}$, условимся называть всюду определенными.

Обозначим

$$\tilde{a}_i \rightleftharpoons a_i^{1/d}, \quad d \rightleftharpoons \sum_{j \in J_0} q_j, \tag{4}$$

тогда коэффициенты H-функций запишутся как $\tilde{a}_i^d$. Такую форму записи коэффициентов назовем приведенной.

1.2. Возводя левую и правую части неявных H-функций данного семейства в какую-либо вещественную степень, можно получать новые семейства. Условимся такие семейства называть родственными. Чтобы избавиться от произвола в выборе значений показателей степени и порождаемой при этом многовариантности представлений родственных семейств H-функций, можно поступить так же, как и в случае явных H-функций [1], у которых этой проблемы нет, поскольку оптимизируемая величина заранее выделена и всегда берется в первой степени. Однако такой подход (вообще говоря, вполне оправданный в определенных ситуа -

циях) нарушает одно из главных достоинств неявных H-функций - равноправие переменных.

Из канонических форм представления неявных H-функций, не нарушающих равноправия переменных, укажем две: <u>целочисленную</u>, у которой все показатели степени - целые, не имеющие общего делителя числа, и <u>естественную</u>, у которой суммарный показатель степени $d \rightleftharpoons \sum_{j \in J_0} q_j = 1$.

Первая форма удобна, например, когда H-функции выражают физические законы. Достоинства второй проявляются при оптимизации (см. п. 1.3.3).

1.3. Над конечной совокупностью H-функций из одного семейства

$$f_i: \quad \prod_{j \in J_0} x_{ij}^{q_j} \prod_{j \in J_1} x_{ij}^{q_j} = a_i, \quad i \in I, \; |I| \rightleftharpoons n, \tag{5}$$

определим оптимизирующую процедуру $\mathcal{H}$, которая состоит в последовательном применении процедур*) H и R.

1.3.1. <u>Процедура H</u>

- устанавливает между переменными H-функций из совокупности (5) (с помощью процедуры суммирования и отношения уравнивания) оптимальные (гармоничные) соотношения:

$$\mathring{x}_{ij} / \sum_i x_{ij} = a_i^{1/d} / \sum_i a_i^{1/d}, \; i \in I, \; j \in J_0; \; d = \sum_{j \in J_0} q_j, \tag{6}$$

---

*) В [3] этим процедурам соответствовали операции H, H1 и H2. Поскольку термин "операция" употреблялся в [1-4] в широком смысле (местность операции задавалась в качестве параметра, а не фиксировалась заранее, как в традиционном определении алгебраической операции), то он заменен на термин "процедура", который допускает более свободную трактовку и не нуждается в специальных оговорках. Замена обозначений H1 и H2 на H и R вызвана не только удобством, а и тем, что функции процедур H и R шире, чем у H1 и H2.

$$\overset{\circ}{x}_{1j} = \overset{\circ}{x}_{2j} = \ldots = \overset{\circ}{x}_{nj}, \quad j \in J_1; \tag{7}$$

- образует (путем подстановки оптимальных значений $\overset{\circ}{x}_{ij}$ в исходную совокупность (5), приведения H-функций этой совокупности к естественной форме и суммирования) <u>суммарную</u> H-функцию

$$f: \quad \prod_{j \in J_0} x_j^{q_j} \prod_{j \in J_1} x_j^{q_j} = a, \tag{8}$$

где

$$x_j = \sum_{i \in I} \overset{\circ}{x}_{ij}, \quad j \in J_0; \quad a = \Big(\sum_{i \in I} a_i^{1/d} \Big)^d, \tag{9}$$

$$x_j = \overset{\circ}{x}_{1j} = \overset{\circ}{x}_{2j} = \ldots = \overset{\circ}{x}_{nj}, \quad j \in J_1; \tag{10}$$

- устанавливает (с помощью соотношений (6) и (7)) область определения суммарной H-функции (8):

$$\{ \check{x}_j \le x_j \le \hat{x}_j \}, \quad j \in J_0 \cup J_1, \tag{11}$$

где

$$\check{x}_j \doteqdot \sup_i \{\check{x}_{ij}(a/a_i)^{1/d}\}, j \in J_0; \quad \check{x}_j \doteqdot \sup_i \{\check{x}_{ij}\}, \quad j \in J_1; \tag{12}$$

$$\hat{x}_j \doteqdot \inf_i \{\hat{x}_{ij}(a/a_i)^{1/d}\}, j \in J_0; \quad \hat{x}_j \doteqdot \inf_i \{\hat{x}_{ij}\}, j \in J_1. \tag{13}$$

Здесь $\check{x}_{ij}$ и $\hat{x}_{ij}$ - наименьшее и наибольшее значения переменной x_{ij}.

1.3.2. <u>Процедура R</u>

- подставляет в (8) вместо x_j, $j \neq l$, соответствующие значения заданной m-ки ограничений

$$(X_1, \ldots, X_{l-1}, X_{l+1}, \ldots, X_{m+1}), \tag{14}$$

образуя результирующую функцию

$$F: \quad \prod_{j\in J_0} X_j^{q_j} \prod_{j\in J_1} X_j^{q_j} = A, \tag{15}$$

где $A = a$ из (9), и вычисляет значение оптимизируемой величины X_1;

- проверяет в согласии с (11) выполнение условия

$$\forall j \quad X_j \in (\check{x}_j, \hat{x}_j); \tag{16}$$

если условие (16) выполняется, то конец, иначе фиксируется нарушение гармоничности*).

1.3.3. В процессе выполнения процедуры H совокупность H-функций (5) приводится к естественной форме, когда сумма показателей степени при переменных нулевого типа $(j \in J_0)$ равна единице. Это является необходимым условием выполнения неравенства Гёльдера [4]:

$$\prod_{j\in J_0} \Big(\sum_i x_{ij}\Big)^{q_j} \geq \sum_i \prod_{j\in J_0} x_{ij}^{q_j}, \tag{17}$$

где $q_j > 0,\ x_{ij} \in R^+,\ d \rightleftharpoons \sum_{j\in J_0} q_j = 1.$

Для превращения неравенства (17) в равенство необходимо и достаточно [4] выполнение соотношений

$$\frac{\overset{o}{x}_{i1}}{\sum_i x_{i1}} = \frac{\overset{o}{x}_{i2}}{\sum_i x_{i2}} = \ldots = \frac{\overset{o}{x}_{im_0}}{\sum_i x_{im_0}};\ i=\overline{1,n}, j \in J_0, m_0 \rightleftharpoons |J_0|. \tag{18}$$

При этом если фиксирована правая часть неравенства (17), то его левая часть достигает наименьшего значения. Именно это и имеет место в интересующем нас случае.

---

*) См. §2.

В согласии с (6) и (9) при $d = 1$ (т.е. для H-функций, представленных в естественной форме) имеем

$$\frac{\overset{\circ}{x}_{ij}}{\sum\limits_i x_{ij}} = \frac{a_i}{\sum\limits_i a_i}; \quad i = \overline{1,n},\ j \in J_0,\ d = 1, \tag{19}$$

и в согласии с (9) коэффициент a суммарной H-функции равен сумме коэффициентов a_i исходных H-функций. Поэтому величина a (при фиксированной сумме) не зависит от распределения $\{a_i,\ i = \overline{1,n}\}$ по величинам. При $d \neq 1$ это не так. Для $d > 1$ величина a минимальна, когда распределение $\{a_i\}$ сосредоточено в точке $\{a_k = a,\ a_{i \neq k} = 0\}$, и максимальна, когда распределение равномерно $\{a_i = a/n\}$. Для $d < 1$ эти распределения меняются ролями.

1.4. Прокомментируем свойства введенных выше понятий.

1.4.1. Можно видеть, что процедура H определяет внутренние связи между переменными исходной n-ки H-функций, при которых устанавливаются взаимосогласованные (гармоничные) соотношения между значениями относительных величин (долей) переменных (независимо от выбора оптимизируемой величины и значений ограничений), а процедура R устанавливает внешние связи этих переменных с задаваемыми извне значениями m-ки ограничений (14) и определяет абсолютные гармоничные значения всех переменных.

1.4.2. Как и ранее [1-3], полученную в результате применения процедуры H совокупность, состоящую из суммарной H-функции (8) и из исходной n-ки H-функций вида (5) с наложенными на них связями (6) и (7), назовем гармоничной системой, или H-системой.

Можно сказать, что процедура H определяет структуру H-системы, а процедура R - ее конкретную реализацию. Это позволяет назвать процессы, выполняемые этими процедурами, соответственно гармонизацией и реализацией.

1.4.3. Обратим внимание на следующее весьма важное обстоятельство. Для совокупностей H-функций вида (5) процесс гармонизации не зависит от конкретных значений ограничений $X_1, \ldots, X_{l-1}, X_{l+1}, \ldots, X_{m+1}$. Иными словами, процесс гармонизации, т.е. установление с помощью процедуры H оптимальных взаимосогласованных значений переменных, не зависит от процесса реализации, выполняемого с помощью процедуры R. Именно благодаря тому, что результатом процедуры H является H-функция из того же семейства, и достигается свойство иерархической однородности, введенное в [1] в качестве одного из основополагающих требований к гармоничным системам.

Более того, оказалось, что процесс гармонизации не зависит также и от выбора оптимизируемой переменной, поскольку суммарная H-функция (8) одна и та же для любого $l \in J$.

1.4.4. Напомним, что в согласии с [1] величины x_j и x_{ij} интерпретируются как количество ресурсов вида j, предоставляемых H-системе и ее i-му элементу, а коэффициенты a, a_i - как удельные расходы любого из видов ресурсов при единичных количествах ресурсов всех остальных видов.

Заметим также, что процедура суммирования (2) и отношение уравнивания (3) соответствуют схемам распределения ресурсов S_0 и S_1, рассмотренным в [1].

В согласии с вышеизложенным процедура H устанавливает пропорции (доли), в которых должны распределяться ресурсы между элементами системы для достижения оптимума по Парето, а процедура R устанавливает значение оптимизируемого ресурса при предоставленных системе количествах всех остальных ресурсов, а также определяет абсолютные значения количеств ресурсов, предоставляемых системой своим элементам.

Обратим внимание на то, что в согласии с (18) все виды ресурсов, распределяемые по схеме S_0, $j \in J_0$, делятся между элементами в одинаковых пропорциях.

1.5. Рассмотрим алгебраические свойства процедуры H.

1.5.1. Для удобства запишем коэффициенты H-функций в приведенной форме (4).

Можно видеть, что в согласии с (9) коэффициент суммарной H-функции независимо от величины суммарного показателя степени d равен

$$\tilde{a} = \sum_i \tilde{a}_i . \tag{20}$$

При этом упрощаются соотношения (6) для оптимальных величин:

$$\overset{o}{x}_{ij} / \sum_i x_{ij} = \tilde{a}_i / \sum_i \tilde{a}_i ; \quad j \in J_0, \; i \in I. \tag{21}$$

1.5.2. Введем операцию <u>объединения</u> H-функций, под которой будем понимать раздельное перемножение левых и правых частей H-функций, не имеющих общих переменных. Например, рассмотрим объединение H-функций f_1 и f_2. Пусть

$$f_1: \quad \prod_{j \in J_0^1} x_j^{q_j} \prod_{j \in J_1^1} x_j^{q_j} = \tilde{a}^{d_1}; \quad d_1 = \sum_{j \in J_0^1} q_j ;$$

$$f_2: \quad \prod_{j \in J_0^2} x_j^{q_j} \prod_{j \in J_1^2} x_j^{q_j} = \tilde{a}^{d_2}; \quad d_2 = \sum_{j \in J_0^2} q_j ; \tag{22}$$

где $J_0^1 \cap J_0^2 = J_1^1 \cap J_1^2 = \emptyset$.

Тогда

$$f_1 \cup f_2 = f: \quad \prod_{j \in J_0} x_j^{q_j} \prod_{j \in J_1} x_j^{q_j} = \tilde{a}^{d}; \quad d = \sum_{j \in J_0} q_j , \tag{23}$$

где

$$J_0 = J_0^1 \cup J_0^2 ; \quad J_1 = J_1^1 \cup J_1^2 \Leftrightarrow d = d_1 + d_2 . \tag{24}$$

1.5.3. Введем также операцию разбиения H-функции как противоположную объединению. Для этого разобьем множества J_0 и J_1 на непересекающиеся подмножества. Например, если их разбить на подмножества J_0^1 и J_0^2, J_1^1 и J_1^2, то из исходной H-функции f получим те же H-функции f_1 и f_2, что и в п. 1.5.2.

1.5.4. Покажем, что процедура H обладает свойством ассоциативности, под которым понимается следующее.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ - исходная конечная совокупность H-функций из одного семейства, имеющая вид (5), но с коэффициентами, представленными в приведенном виде (4). Разобьем ее на две подсовокупности $\{f_i \mid i \in I_1\}$ и $\{f_i \mid i \in I_2\}$ такие, что $I_1 \cup I_2 = I$ и $I_1 \cup I_2 = \emptyset$. Применяя процедуру H сначала к каждой из них, а потом к полученным суммарным H-функциям, нетрудно убедиться в том, что

$$H\{H\{f_i \mid i \in I_1\}, H\{f_i \mid i \in I_2\}\} = H\{f_i \mid i \in I\}. \qquad (25)$$

Обратим внимание на то, что абсолютные значения оптимальных переменных нулевого типа подсовокупностей H-функций те же, что и у исходной совокупности. Действительно, в согласии с (21) и свойствами пропорций:

$$\frac{\overset{\circ}{x}_{ij}}{\tilde{a}_i} = \frac{\sum_{i \in I_\sigma} x_{ij}}{\sum_{i \in I_\sigma} \tilde{a}_i} = \frac{\sum_{i \in I} x_{ij}}{\sum_{i \in I} \tilde{a}_i}, \quad i \in I_\sigma, \ \sigma = 1,2, \ j \in J_0. \qquad (26)$$

1.5.5. Для доказательства свойства дистрибутивности процедуры H рассмотрим три совокупности H-функций:

$$f_i: \quad \prod_{j \in J_0} x_{ij}^{q_j} \cdot \prod_{j \in J_1} x_{ij}^{q_j} = \tilde{a}_i^{d}, \quad i \in I; \ d = \sum_{j \in J_0} q_j; \qquad (27)$$

$$f_i': \quad \prod_{j\in J_0'} x_{ij}^{q_j} \cdot \prod_{j\in J_1'} x_{ij}^{q_j} = \tilde{a}_i^{d'}, \ i\in I; \quad d' = \sum_{j\in J_0'} q_j; \tag{28}$$

$$f_i'': \quad \prod_{j\in J_0''} x_{ij}^{q_j} \cdot \prod_{j\in J_1''} x_{ij}^{q_j} = \tilde{a}_i^{d''}, \ i\in I; \quad d'' = \sum_{j\in J_0''} q_j, \tag{29}$$

где

$$J_\sigma' \cup J_\sigma'' = J_\sigma; \ J_\sigma' \cap J_\sigma'' = \emptyset \Leftrightarrow d = d' + d'', \ \sigma = 1,2, \tag{30}$$

т.е. совокупности (28) и (29) представляют собой согласованное разбиение переменных H-функций из совокупности (26) и

$$\forall i\in I \qquad f_i' \cup f_i'' = f_i \,. \tag{31}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$H\{f_i' \mid i\in I\} \cup H\{f_i'' \mid i\in I\} = H\{f_i \mid i\in I\}. \tag{32}$$

Обратим внимание на то, что относительные оптимальные значения переменных во всех трех совокупностях одни и те же:

$$\overset{o}{x}_{ij} \Big/ \sum_{i\in I} x_{ij} = \tilde{a}_i \Big/ \sum_{i\in I} \tilde{a}_i, \ j\in J_0, \text{или} \ j\in J_0', \text{или} \ j\in J_0'';$$
$$\overset{o}{x}_{ij} = x_j, \qquad j\in J_1, \text{или} \ j\in J_1', \text{или} \ j\in J_1''. \tag{33}$$

1.6. Можно видеть, что в H-системе из $(n+1)(m+1)$ переменных всего m независимых. Если фиксировать значения m переменных исходных H-функций (с различными значениями индекса j), то из (5)-(8) однозначно следуют значения для всех остальных переменных исходных и суммарной H-функций. Именно так устанавливалась область определения суммарной H-функции (11). И, наоборот, если зафиксировать значения m-ки переменных суммарной H-функции, то получим значения переменных всех исходных H-функций. Области определения суммарной H-функции соответствует у каждой из исходных H-функций область, вообще говоря, меньшая, чем область определения этой H-функции.

Обозначим через $\check{X}_j$ и $\hat{X}_j$, $j \in J$, наименьшие и наибольшие значения задаваемых надсистемой $\mathfrak{m}$-ок ограничений (14) (и определяемых ими величин X_1). Набор этих значений определяет <u>рабочую</u> область суммарной H-функции и соответствующие ей рабочие области исходных H-функций. Очевидно, что для достижения взаимосогласованности между H-системой и надсистемой необходимо, чтобы рабочая область не выходила за границы области определения суммарной H-функции, т.е.

$$\forall j \quad \check{x}_j \leq \check{X}_j, \quad \hat{X}_j \leq \hat{x}_j. \tag{34}$$

§2. Нарушение гармоничности

Рассмотрим ситуации, когда рабочая область больше области определения H-функции. Ограничимся простейшим случаем, когда такое несоответствие имеет место лишь для одной переменной одной из H-функций исследуемой совокупности.

2.1. Свойства ассоциативности (см. п.1.5) позволяют ограничиться рассмотрением совокупности из двух двухаргументных H-функций:

$$\varphi_i: \quad z_{iu}^{q_u} z_{iV}^{q_V} = a_i, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

где $z_{1u}, z_{2u}, z_{2V} \in R^+$, $z_{1V} = c$.

Совокупность (1) будем сравнивать с совокупностью всюду определенных H-функций

$$f_i: \ x_{iu}^{q_u} x_{iV}^{q_V} = a_i, \ i = 1,2, \ x_{ij} \in R^+, \ j = u,V \tag{2}$$

из того же семейства, что и (1), и с теми же значениями коэффициентов.

Применяя к (1) и (2) процедуру H , получаем суммарные H-функции:

$$\varphi: \quad z_u^{q_u} z_v^{q_v} = a; \tag{3}$$

$$f: \quad x_u^{q_u} x_v^{q_v} = a, \tag{4}$$

где

$$a = \left(\sum_i a_i^{1/d} \right)^d, \qquad d = \sum_{j \in J_0} q_j . \tag{5}$$

Таблица 1

Области определения H-функций и значений переменных при фиксированном значении одного из переменных

$q_u q_v$	00		01		10		11	
j	u	v	u	v	u	v	u	v
$\check{z}_{1j} = \hat{z}_{1j}$	$\tilde{a}_1 \left(\frac{\tilde{a}_1}{c}\right)^{\beta}$	c	$\tilde{a}_1 c^{-\beta}$	c	$\left(\frac{\tilde{a}_1}{c}\right)^{\beta}$	c	$c^{-\beta}$	c
$\check{z}_{2j} = \hat{z}_{2j}$	$\tilde{a}_2 \left(\frac{\tilde{a}_1}{c}\right)^{\beta}$	$\tilde{a}_2 \frac{c}{\tilde{a}_1}$	$\tilde{a}_2 c^{-\beta}$	c	$\left(\frac{\tilde{a}_1}{c}\right)^{\beta}$	$\tilde{a}_2 \frac{c}{\tilde{a}_1}$	$c^{-\beta}$	c
$\check{z}_j = \hat{z}_j$	$\tilde{a} \left(\frac{\tilde{a}_1}{c}\right)^{\beta}$	$\tilde{a} \frac{c}{\tilde{a}_1}$	$\tilde{a} c^{-\beta}$	c	$\left(\frac{\tilde{a}_1}{c}\right)^{\beta}$	$\tilde{a} \frac{c}{\tilde{a}_1}$	$c^{-\beta}$	c
d	$q_u + q_v$		q_u		q_v		0	
$\tilde{a}_i = a_i^{1/d}, \quad \tilde{a} = a^{1/d}, \quad \beta = q_v / q_u$								

Заметим, что H-функции f и φ отличаются лишь областями определения: f всюду определена, а φ определена только в одной точке $(\check{z}_v = \hat{z}_v;\ \check{z}_u = \hat{z}_u)$, конкретные значения координат которой зависят от свойств семейства (табл.1), где $\sigma_j = 0 \Leftrightarrow j \in J_0$; $\sigma_j = 1 \Leftrightarrow j \in J_1$.

2.2. Как можно видеть, из табл.1, для того чтобы область значений суммарной H-функции оказалась стянутой в точку, достаточно, чтобы была стянута в точку область значений одной из переменных одной из H-функций. В этом случае лишь в одной точке рабочей области суммарной H-функции достигается оптимальное распределение ресурсов системы между ее элементами. Нас будет интересовать, насколько отличается распределение во всех остальных точках рабочей области от оптимального. Для этого рассмотрим те же семейства H-функций, что и в табл.1, но при различном выборе оптимизируемой переменной. Решение, как и ранее, будем искать в виде результирующей функции

$$Z_u^{q_u} Z_v^{q_v} = A\ . \tag{6}$$

Поскольку расчеты достаточно просты, то приведем лишь результаты (табл.2), где оптимизируемые величины системы отмечены ноликом сверху.

Можно показать, что для распространения приведенных в табл.2 результатов на H-функции с числом переменных, большим двух, достаточно заменить q_u на d^*, где

$$d^* \rightleftharpoons \sum_{j \in J_0^*} q_j\ ,\quad J_0^* \rightleftharpoons J_0/v\ . \tag{7}$$

2.3. Как можно видеть из табл.2, отсутствие возможности изменять величину z_{1v} приводит к следующему:

- величина коэффициента A результирующей функции становится зависимой не только от величин коэффициентов исходных

Т а б л и ц а 2

Значения коэффициента **A** результирующей функции при нарушениях гармоничности

Код	$A(\delta)/a$	I $\check{\delta} \le \delta \le 1$	П $1 \le \delta \le \hat{\delta}$	δ
00	I–П. $\left[\alpha_1\delta^{-\beta}+\alpha_2\left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1\delta}\right)^{\beta}\right]^{q_u}$	0 — 1	1 — $1/\alpha_1$	$\frac{c/X_v}{\alpha_1}$
01	I. $[\alpha_1\delta^{-\beta}+\alpha_2]^{q_u}$	0 — 1		c/X_v
10	I. δ^{-q_v} П. $[\alpha_2/(1-\alpha_1\delta)]^{q_u}$	0 — 1	1 — $1/\alpha_1$	$\frac{c/X_v}{\alpha_1}$
00	I–П. $\left[\alpha_1\delta+\alpha_2\left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1\delta^{-\beta}}\right)^{1/\beta}\right]^{q_v}$	$\alpha_1^{1/\beta}$ — 1	1 — ∞	$\frac{c/\mathring{X}_v}{\alpha_1}$
01	I. $[\alpha_2/(1-\alpha_1\delta^{-\beta})]^{q_u}$ П. δ^{q_v}	$\alpha_1^{1/\beta}$ — 1	1 — ∞	$c/\mathring{X}_v$
10	П. $[\alpha_1\delta+\alpha_2]^{q_v}$		1 — ∞	$\frac{c/\mathring{X}_v}{\alpha_1}$

$\alpha_1 \doteqdot (a_i/a)^{1/d}$; $X_j = Z_j$, $\mathring{X}_j \le \mathring{Z}_j$, $\mathring{X}_v = a^{1/q_u} X_u^{-q_u/q_v}$

$\delta \doteqdot c/\mathring{x}_{1v}$; $\delta = c/\alpha_1 X_v$, $v \in J_0$; $\delta = c/X_v$, $v \in J_1$

функций, но и от величин ограничений Z_j, $j \neq 1$, $j = \overline{1,m+1}$, т.е. результирующая функций (6) уже не является Н-функцией. Она даже не степенная;

- для одних и тех же исходных функций величина коэффициента A получается различной в зависимости от выбора оптимизируемой величины, т.е. при $l = v$ и при $l \neq v$ (чего не было в тех случаях, когда рабочая область находилась в границах области определения Н-функций). Но, как и ранее, величина A будет одной и той же для всех $l = j$, $j \neq v$, $j = \overline{1,m+1}$;

- по мере удаления значения δ от единицы, характеризующего отличие величины $z_{1V} = c$ от соответствующей величины $\overset{o}{x}_{1V}$, происходит неограниченный рост величины коэффициента A, а в силу (6) и оптимизируемой величины $\overset{o}{Z}_1$;

- допустимые значения c/Z_V ограничены сверху, а $c/\overset{o}{X}_V$ – снизу. Эти ограничения - следствие естественного предположения, что любой из элементов получает не больше ресурсов (любого из видов), чем их отведено для системы. Конкретные значения ограничений $(\check{\delta}, \hat{\delta})$ для величины δ приведены в табл.2. Таким образом, при фиксированной m-ке ограничений Z_j, $j \neq 1$, $j = \overline{1,m+1}$, для рассмотренных случаев существуют значения величины c, при которых система (1) не имеет решения.

Вообще говоря, можно распространить процедуру R и на ситуации, когда рабочая область больше области определения суммарной Н-функции, но лежит в пределах, характеризуемых предельными значениями величины δ. Так, в рассмотренных выше случаях для этого достаточно брать соответствующие значения коэффициента $A(\delta)$ и предельные значения для δ $(\check{\delta}, \hat{\delta})$ из табл. 2.

2.4. Итак, отсутствие возможности изменять величину даже одной какой-либо переменной в совокупности Н-функций ведет не только к потере эффективности (определяемой перерасходом ресурсов по сравнению с аналогичной системой без ограничений на изменения величин переменных), но и к возникновению трудностей при дальнейшем использовании результирующей системы в качестве элемента подсистемы, поскольку утрачивается свойство иерархической однородности [1], а также простота и прозрачность достижения взаимосогласованности всех элементов системы, которой обладают H-функции). Заметим, что если даже специальным подбором величин ограничений (Z_V при $l \neq V$, Z_j, $j \neq V$, при $l = V$) (см. табл. 1) добиться той же величины эффективности (т.е. $A = a$) при той же результирующей H-функции, то при последующем рассмотрении системы как элемента надсистемы придется вновь иметь дело с H-функцией с фиксированными значениями переменных.

Аналогично будет обстоять дело и в тех ситуациях, когда $z_{1V} \in [c_1, c_2]$, а $\overset{o}{x}_{1V} < c_1$ или $\overset{o}{x}_{1V} > c_2$. Тогда в табл. 2 величина c заменится либо на c_1, либо на c_2.

Естественно, что если ограниченных переменных будет больше, чем одна, то задача еще более усложнится.

2.5. Как уже указывалось выше, величина коэффициента A (и оптимизируемой величины Z_1) неограниченно возрастает при отклонении величины δ от значения $\delta = 1$ как в большую, так и в меньшую сторону. Физическая природа этих отклонений различна. При $\delta < 1$ первый элемент не может воспринять <u>больше</u>, а при $\delta > 1$ <u>меньше</u> ресурса вида V, чем это требуется для достижения оптимума. Иначе говоря, при $\delta < 1$ первый элемент функционирует <u>недостаточно интенсивно</u>. При этом частично обесценивается вклад второго элемента и снижается интенсивность работы всей системы. При $\delta > 1$ первый элемент функционирует <u>слишком интенсивно</u> за счет ресурсов, отбираемых у второго элемента. Из-за этого второй элемент функционирует недостаточно интенсивно, что и ведет к ухудшению качества функционирования системы.

Ситуацию, возникающую при $\delta \neq 1$, назовем узким местом. Будем говорить об узком месте первого рода при $\delta < 1$ и второго рода при $\delta > 1$.

Узкое место первого рода возникает, например, когда надежность одного из блоков устройства ниже, чем у остальных блоков, а узкое место второго рода - когда его надежность выше, чем у всех остальных. В обоих случаях наличие менее надежного блока обесценивает ресурсы, затраченные на повышение надежности у всех остальных блоков.

Какого рода узкое место хуже - это зависит от конкретной ситуации. Так, для системы (1) при $a_1 > a_2$ хуже узкое место первого рода, при $a_1 < a_2$ - второго.

§3. Исследование случая взаимозаменяемости ресурсов

Продолжая изучение свойств процедуры R, начатое в §1, исследуем зависимость значения оптимизируемой величины X_1 от распределений $\{q_j\}$ и $\{X_j\}$. Сделаем это на примере пар величин.

3.1. Пусть X_u и X_v, $u,v \neq 1$, - ограничения, выступающие в качестве значений аргументов результирующей H-функции с показателями степени q_u и q_v. Предположим также, что в конкретной практической системе X_u и X_v (и соответственно x_{iu} и $x_{iv}, i = \overline{1,n}$) интерпретируются как аддитивные величины. (Иначе говоря, ресурсы u-го и v-го видов являются взаимозаменяемыми.)

Обозначим:

$$q_u + q_v \rightleftharpoons q, \tag{1}$$

$$X_u + X_v \rightleftharpoons X, \tag{2}$$

$$q_u/q \rightleftharpoons \gamma \Rightarrow q_v/q = 1 - \gamma, \tag{3}$$

$$X_u/X \rightleftharpoons \alpha \Rightarrow X_v/X = 1 - \alpha. \tag{4}$$

Следуя той же манере представления выкладок, что и в [1], имеем

$$X_u^{q_u} X_v^{q_v} \overset{(3)}{\underset{(4)}{=}} [\alpha^{\gamma}(1-\alpha)^{1-\gamma} X]^q \rightleftharpoons U^q(\alpha,\gamma) X^q; \tag{5}$$

при фиксированных q и X и $u,v \in J_0$ или $u,v \in J_1$ в согласии с (1.15)*) имеем

$$X_1^{q_1} U^q(\alpha,\gamma) = \mathrm{const}, \tag{6}$$

т.е. величина X_1 в данных условиях полностью определяется значением функции $U(\alpha,\gamma)$, которое, в свою очередь, определяется значениями параметров распределений α и γ.

3.2. Для исследования функции $U(\alpha,\gamma)$ зафиксируем величину γ и, приравнивая нулю логарифмическую производную $\partial \ln U(\alpha,\gamma)/\partial\alpha$, определим оптимальное значение α:

$$\frac{\gamma - \overset{\circ}{\alpha}}{\overset{\circ}{\alpha}(1-\overset{\circ}{\alpha})} = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{\alpha} = \gamma, \tag{7}$$

при котором, как нетрудно убедиться, достигается

$$\sup_{\alpha} U(\alpha,\gamma) = U(\gamma,\gamma). \tag{8}$$

Исследуя далее тем же способом функцию $U(\gamma,\gamma)$, имеем:

$$\inf_{\gamma} U(\gamma,\gamma) = U(1/2, 1/2) = 1/2; \tag{9}$$

$$\sup_{\alpha,\gamma} U(\alpha,\gamma) = \sup_{\gamma} U(\gamma,\gamma) = U(0,0) = U(1,1) = 1; \tag{10}$$

$$\inf_{\alpha} U(\alpha,\gamma > 0) = U(0,\gamma) = U(1,\gamma) = 0. \tag{11}$$

Все эти свойства видны и на рисунке. Можно также видеть, что семейство функций $U(\alpha,\gamma)$ при различных значениях γ пере-

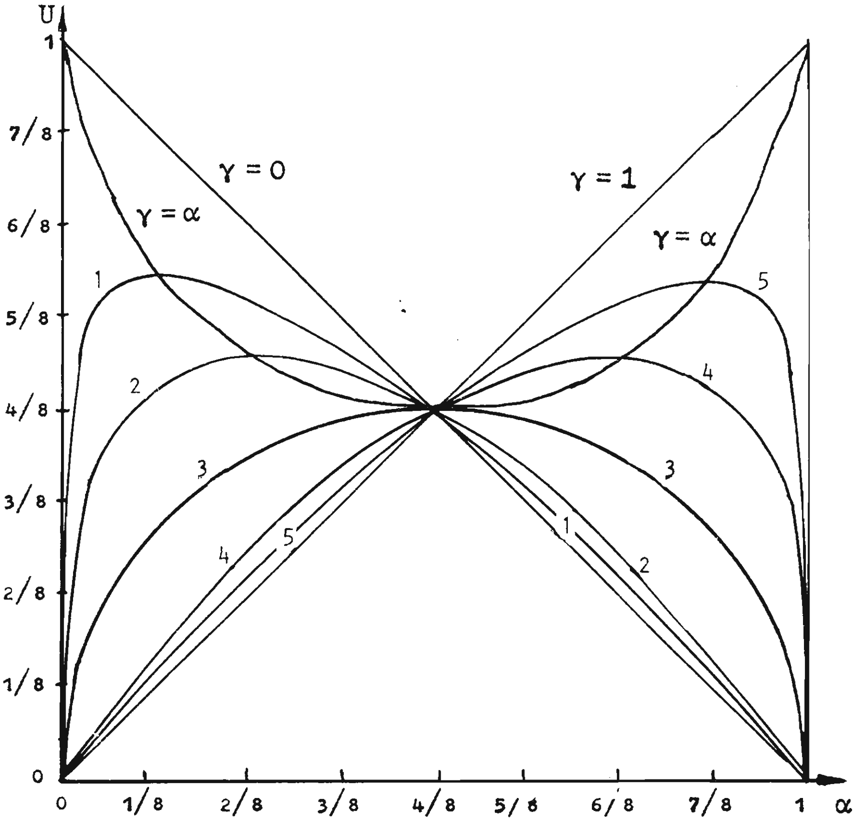
*) Здесь и далее первое число ссылки означает номер параграфа.

секается в одной точке $(U = 1/2, \alpha = 1/2)$, т.е.

$$\forall \gamma \quad U(1/2, \gamma) = 1/2, \tag{12}$$

и что функция $U(\alpha, \gamma)$ обладает зеркальной симметрией:

$$U(1-\alpha, 1-\gamma) = U(\alpha, \gamma). \tag{13}$$



(1 - γ=1/8; 2 - γ=1/4; 3 - γ=1/2; 4 - γ=3/4; 5 - γ = 7/8)

При $\gamma = 1/2$ функция $U(\alpha, 1/2)$ превращается в уравнение окружности

$$U^2 + (\alpha - 1/2)^2 = 1/4 \qquad (14)$$

радиусом 1/2 и с центром в точке ($U = 0$, $\alpha = 1/2$).

Попутно заметим, что полуокружность того же радиуса с центром в точке ($U = 1$, $\alpha = 1/2$) окажется вписанной в фигуру, соответствующую функции $U(\alpha,\alpha)$.

В согласии с (6) и (11) наименьшее значение величины $X_1(\alpha,\gamma)$ достигается при $\alpha = \gamma = 0$ (или $\alpha = \gamma = 1$), когда $U(\alpha,\gamma) = 1$, т.е.

$$\mathring{X}_1(\alpha,\gamma) = \inf_{\alpha,\gamma} X_1(\alpha,\gamma) = X_1(0,0) = X_1(1,1).$$

Это означает, что наилучшим для наших целей будет случай, когда распределения величин $\{X_u, X_v\}$ и $\{q_u, q_v\}$ взаимо - согласованны, т.е.

$$X_u/X = q_u/q; \quad X_v/X = q_v/q, \qquad (16)$$

и сосредоточены в точке, т.е.

$$\alpha = \gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_u = 0,\ q_u = 0; & X_u^{q_u} = 1, \\ X_v = X,\ q_v = q; & X_v^{q_v} = X^q; \end{cases}$$

$$\alpha = \gamma = 1 \Rightarrow \begin{cases} X_u = X,\ q_u = q; & X_u^{q_u} = X^q, \\ X_v = 0,\ q_v = 0; & X_v^{q_v} = 1. \end{cases} \qquad (17)$$

В этом вырожденном случае у H-функции фактически на один аргумент становится меньше и соответственно уменьшается на единицу число ограничений (1.14).

Если принять за единицу величину $\mathring{X}_1$ из (15) и сопоставлять с нею значения $X_1(\alpha,\gamma)$ при других вариантах распределений, то наихудшим из взаимосогласованных распределений в соответствии с (6) и (9), будет

$$X_1(1/2, 1/2) = 2^{q/q_1} \overset{\circ}{X}_1 . \tag{18}$$

Для невзаимосогласованных вариантов распределений величина $X_1(\alpha,\gamma)$ может быть сколь угодно большой, каковой и становится при $\alpha = 0$, $\gamma > 0$ и при $\alpha = 1$, $\gamma < 1$, т.е.

$$X_1(0, \gamma > 0) = X_1(1, \gamma < 1) = \infty. \tag{19}$$

Эти результаты можно интерпретировать следующим образом. При произвольном распределении величин ресурсов X_u и X_v и при неизменности их суммарного расхода (т.е. $X_u + X_v = X = \text{const}$) возникает значительный по сравнению с оптимальным случаем (15) перерасход ресурса 1-го вида (в пределе бесконечно большой).

3.3. Выше мы рассмотрели случай, когда $u, v \in J_0$ либо $u, v \in J_1$ и, следовательно, оставались неизменными величина суммарного показателя степени d и зависящая от него величина весового коэффициента a (см. (1.9)). Пусть теперь $u \in J_0$, а $v \in J_1$. В этом случае с изменением величины показателя степени q_u будет изменяться и величина d и соответственно a, т.е. $d = d(\gamma)$ и $a = a(\gamma)$.

Можно видеть, что

$$\begin{aligned} \inf_{\gamma} d(\gamma) &= d(0) \quad \text{и} \quad \inf_{\gamma} a(\gamma) = a(0), \\ \sup_{\gamma} d(\gamma) &= d(1) \quad \text{и} \quad \sup_{\gamma} a(\gamma) = a(1), \end{aligned} \tag{20}$$

т.е. распределения $(\alpha = \gamma = 0)$ и $(\alpha = \gamma = 1)$ теперь уже перестают быть равноценными и

$$a(1) > a(0) \Rightarrow X_1(1,1) > X_1(0,0), \tag{21}$$

а, следовательно,

$$(u \in J_0, v \in J_1) \Rightarrow \inf_{\alpha,\gamma} X_1(\alpha,\gamma) = X_1(0,0). \tag{22}$$

3.4. Последовательно применяя полученные результаты к парам, можно обобщить эти результаты на любое конечное число аддитивных величин, т.е. и в этом случае распределения $\{X_k\}$ и $\{q_k\}$ должны быть взаимосогласованными и сосредоточенными в точке (с индексом $k \in J_1$).

3.5. Из проделанного нами рассмотрения вытекает также следующий важный частный вывод: любая замена одного аргумента двумя и более аргументами в системе H-функций ведет к увеличению расхода ресурсов.

Таким образом, при замене X^q на $X_u^{q_u} X_v^{q_v}$ даже при сохранении величины суммарного показателя степени d, т.е. $q_u + q_v = \text{const}$, имеет место

$$X_u^{q_u} X_v^{q_v} = X^q \Rightarrow X_u + X_v > X, \tag{23}$$

а при

$$X_u + X_v = X \Rightarrow X_u^{q_u} X_v^{q_v} < X^q, \tag{24}$$

т.е. в случае (23), растет величина ресурса, соответствующего заменяемому аргументу, а в случае (24) увеличивается расход оптимизируемого ресурса. Причина этого на первый взгляд неожиданного вывода таится в увеличении числа ограничений (одно ограничение X заменяется двумя: X_u и X_v). Здесь, видимо, имеет место проявление общего принципа: введение ограничения, затрудняющего свободу маневра ресурсами, ведет к перерасходу ресурсов.

Для гармоничных систем этот принцип не просто декларируется, а каждое подобное ограничение рассмотренного типа может быть оценено количественно, с помощью приведенных выше соотношений.

3.6. Для более наглядной демонстрации полученного результата сопоставим две возможные ситуации.

Ситуация 1. Каждым из m видов ресурсов (кроме оптимизируемого) ведает свой чиновник, который независимо от остальных определяет величину X_j представляемого системе ресурса j-го вида.

Ситуация 2. Всеми m видами ресурсов ведает один суперчиновник.

Из сделанного выше рассмотрения следует, что у суперчиновника больше возможностей для маневра ресурсами и при желании (и умении, конечно) он может добиться на много больше результатов, чем контора из его m собратьев.

Если чиновников заменить божествами, ведающими каждый своей сферой, а суперчиновника - единым всемогущим богом, то из нашей модели следует преимущество монотеизма перед многобожием, т.е. получается тот же результат, к которому на основе теоретико-игровой модели пришел в одной из своих последних работ Али Иванович Кокорин [5].

Литература

1. КОСАРЕВ Ю.Г. О математической модели гармоничных систем. 1 //Математическое обеспечение вычислительных систем из микро-ЭВМ. - Новосибирск, 1983. - Вып. 96: Вычислительные системы. - С. 3-28.

2. КОСАРЕВ Ю.Г. О математической модели гармоничных систем. П //Анализ разнотипных данных. - Новосибирск, 1983. -Вып. 99: Вычислительные системы. - С. 15-38.

3. Его же. Обобщенная модель гармоничных систем //Машинный анализ сложных систем. -Новосибирск, 1986. - Вып. 118: Вычислительные системы. -С. 37-46.

4. ХАРДИ Г.Г., ЛИТТЛЬВУД Д.Е., ПОЛИЯ Г. Неравенства. -М.: ИЛ, 1948. - 456 с.

5. KOKORIN A.I. Mathematical model of transition from polytheism to monotheism - Abstracts of 8 Int. congr. LMPS'87. Moscow - 1987. -Vol. 1, Sect.1. -P. 98-100.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 октября 1987 года