В Ы Ч И С Л И Т Е Л Ь Н Ы Е С И С Т Е М Ы

Сборник трудов
1967г. Института математики СО АН СССР Выпуск 24

О ПОТЕРЯХ ВРЕМЕНИ НА СИНХРОНИЗАЦИЮ В ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Ю.Г. Косарев, С.В. Нагаев

Как показано в [1], параллельные алгоритмы решения многих вычислительных задач полностью (или почти полностью) состоят из последовательностей p-операторов с одинаковыми компонентами. Вследствие этого совпадают и соответствующие участки программ, одновременно выполняемые различными элементарными машинами (ЭМ). Если бы время выполнения каждой операции было постоянно,то на таких участках ЭМ работали бы синхронно и одновременно приступали бы к выполнению команд системы: обобщенного условного перехода, обмена и настройки [2]. Обычно время выполнения операций зависит от операнд, поэтому возникает необходимость синхронизировать работу ЭМ перед командами системы.

В данной работе обсуждаются потери времени на подобную синхронизацию и даются численные оценки для вычислительной системы "Минск-222" [3], построенной на базе ЭВМ "Минск-2" или "Минск-22".

1. Интересующая нас задача состоит в следующем. Имеется вычислительная система из ℓ одинаковых машин, каждая из которых обладает одним и тем же набором не более чем двуместных операций $\{A_1, \ldots, A_s\} = A$. Пусть все машины выполняют одну и ту же последовательность операций $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_r}$ (принадлежащих множеству A) над различными наборами операнд

$a_1^i, a_2^i, \ldots, a_r^i$ и $b_1^i, b_2^i, \ldots, b_r^i$ $(i=1,2,\ldots,\ell)$.

Обозначим среднюю длительность выполнения операций данной последовательности в i-й машине через

$$T_{ri} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} t_{ji}, \tag{I}$$

где t_{ji} - время выполнения j-ой по счету операции в i-ой машине.

В общем случае t_{ji} зависят от вида операции и операнд, т.е.

$$t_{ji} = f(A_{k_j}, a_j^i, b_j^i). \tag{2}$$

Интересующие нас средние потери на синхронизацию будут, очевидно, равны

$$\tau_{r\ell} = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\widetilde{T}_{r\ell} - T_{ri}\right), \tag{3}$$

где

$$\widetilde{T}_{r\ell} = \max_{1\le i\le \ell} T_{ri}, \tag{4}$$

или

$$\tau_{r\ell} = \widetilde{T}_{r\ell} - \overline{T}_{r\ell}, \tag{5}$$

где

$$\overline{T}_{r\ell} = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell} T_{ri}. \tag{6}$$

Важно установить, как зависит величина $\tau_{r\ell}$ от числа ЭМ ℓ и длины последовательности r.

В общем случае операнды можно считать случайными ограниченными дискретными величинами вида $\pm a\cdot 2^{\pm k}$, где порядок числа $k = 0, I, \ldots, K$, а его мантисса $0 \le a < 1$ представляет собой m-разрядное двоичное число. В силу (2) t_{ji} также будут дискретными случайными величинами.

Интуитивно ясно, что математическое ожидание $\tau_{r\ell}$ увеличивается с ростом ℓ и уменьшается при возрастании r. Следующая оценка подтверждает это предположение.

$$M\tau_{r\ell} \le \sqrt{\frac{\ell-1}{r^2}\sum_{k=1}^{s} r_k D\tau_k}, \tag{7}$$

где $D\tau_k$ – дисперсия продолжительности операции k-го вида (т.е. операции $A_k \in A$), τ_k – число операций k-го вида ($\sum_{k=1}^{S} \tau_k = \tau$).

Действительно,

$$M\tau_{\tau\ell}^2 \leq \sum_{h=1}^{\ell} M\tau_{\tau\ell}^2 \Big|_{\widetilde{T}_{\tau\ell} = T_{\tau h}} P(\widetilde{T}_{\tau\ell} = T_{\tau h}) \cdot \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что

$$M\tau_{\tau\ell}^2 \Big|_{\widetilde{T}_{\tau\ell} = T_{\tau h}} P(\widetilde{T}_{\tau\ell} = T_{\tau h}) \leq \frac{1}{\ell^2} M\Big(\sum_{i=1}^{\ell}(T_{\tau h} - T_{\tau i})\Big)^2 =$$

$$= \frac{\ell-1}{\ell} DT_{\tau 1} = \frac{\ell-1}{\ell\tau^2} \sum_{k=1}^{S} \tau_k D\tau_k \cdot \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует справедливость (7).

Для наших целей важно знать не столько абсолютную, сколько относительную величину простоев

$$M\tau_{\tau\ell} \Big/ \frac{1}{\tau} \sum_{K=1}^{S} \tau_k M\tau_k .$$

Пусть $\tau_{min}(\mathcal{E})$ – минимальное среди q таких, что при всех возможных τ_k

$$\frac{M\tau_{\tau\ell}}{\frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{S} \tau_k M\tau_k} \leq \mathcal{E} \tag{I0}$$

для всех $\tau \geq q$.

Из неравенства (7) вытекает, что (I0) имеет место во всяком случае при тех τ, для которых

$$\max_{\substack{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \\ \tau_1+\tau_2+\dots+\tau_k = \tau}} \frac{(\ell-1)\sum_{k=1}^{S} \tau_k D\tau_k}{\left(\sum_{k=1}^{S} \tau_k M\tau_k\right)^2} \leq \mathcal{E}^2 . \tag{II}$$

Нахождение этого максимума – довольно трудоемкая задача. Проблема, однако, существенно упрощается, если наложить на τ_k дополнительные ограничения.

Пусть $\tau^*min(\mathcal{E})$ – наименьшее целое решение неравенства

$$\max_{K} \frac{D\tau_K}{\tau(M\tau_K)^2} \leq \frac{\mathcal{E}^2}{\ell-1} .$$

Предположим, что $\tau_k \geq \tau^*_{min}(\varepsilon)$ для всех k. Очевидно, в этом случае

$$\left(\frac{M\tau_{\tau\ell}}{\frac{1}{\tau}\sum\limits_{k=1}^{s}\tau_k M\tau_k}\right)^2 \leq (\ell-1)\frac{\sum\limits_{k=1}^{s}\tau_k D\tau_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{s}\tau_k M\tau_k\right)^2} \leq$$

$$\leq (\ell-1)\frac{\sum\limits_{k=1}^{s}\tau_k D\tau_k}{\sum\limits_{k=1}^{s}\tau_k^2 (M\tau_k)^2} \leq (\ell-1)\max_k \frac{D\tau_k}{\tau_k (M\tau_k)^2} \leq$$

$$\leq \frac{(\ell-1)}{\tau^*_{min}(\varepsilon)} \max_k \frac{D\tau_k}{(M\tau_k)^2} \leq \varepsilon^2 .$$

Эта оценка удовлетворительна, если τ_k мало отличается от τ/S. Когда это не так, предпочтительнее оказывается следующая оценка.

Положим

$$D^* = \max_{\tau_k \neq 0} D\tau_k \quad \text{и} \quad M^* = \max_{\tau_k \neq 0} M\tau_k .$$

Пусть $\beta = \frac{\tau_{j_0}}{\tau}$, где j_0 - номер операции, для которой $M\tau_{j_0} = M^*$.

Тогда неравенство (II) справедливо для

$$\tau > \sqrt{\frac{(\ell-1)D^*}{\beta^2 M^{*2}}} . \tag{I2}$$

Действительно,

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{s}\tau_k D\tau_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{s}\tau_k M\tau_k\right)^2} < \frac{\tau D^*}{\tau_{j_0}^2 M^{*2}} \leq \frac{D^*}{\tau\beta^2 M^{*2}} . \tag{I3}$$

Отсюда легко следует (I2).

В некоторых случаях может оказаться полезной следующая грубая, но зато абсолютная оценка

$$\tau_{min}(\varepsilon) \doteq \frac{(\ell-1)\tilde{D}}{\tilde{M}^2 \varepsilon^2}, \tag{I4}$$

где
$$\tilde{M} = \min_k M\tau_k , \quad \tilde{D} = \max_k D\tau_k .$$

Неравенство (I4) немедленно получается из неравенства (7)

$$\frac{\sum_{k=1}^{S} \tau_k D\tau_k}{\left(\sum_{k=1}^{S} \tau_k M\tau_k\right)^2} \leq \frac{\tilde{D}}{\tau \tilde{M}^2}.$$

2. Определение $D\tau_k$, входящих в (7), требует знания процесса выполнения операций A_k в ЭМ. Для большинства операций обычных ЭВМ τ_k не зависит от операнд и $D\tau_k = 0$. К сожалению, наиболее употребительные вычислительные операции этим свойством, как правило, не обладают.

В наиболее общем виде зависимость τ_k от операнд может быть записана как

$$\tau_k = \tau_k^o + h\varphi_k(z_k), \tag{I5}$$

где τ_k^o - постоянная часть затрат времени на выполнение операции A_k; $\varphi_k(z_k)$ - функция, определяющая число тактов длительностью h в зависимости от значения случайной величины z_k.

Например, если операция умножения выполняется простейшим способом путем последовательного умножения на один разряд мантиссы множителя, то длительность операции будет линейной функцией числа единиц i в мантиссе множителя

$$\tau_x = \tau_x^o + h_i . \tag{I6}$$

Для этого случая

$$p(\tau_x = \tau_x^o + h_i) = C_m^i p^i q^{m-i} . \tag{I7}$$

Если предположить, что вероятность появления единицы на любом месте, равная p, а нуля - q, не зависит от значения других разрядов мантиссы, то

$$D\tau_x = mpq. \tag{I8}$$

Если операндами с одинаковой вероятностью могут быть любые из 2^m чисел или, что то же, $p=q$, то

$$D\tau_x = m/4 . \qquad (19)$$

Когда умножение выполняется сразу на два и более разрядов множителя, то функция $\varphi_x(z_k)$ уже не имеет универсального вида и обычно различна для различных ЭВМ.

3. В машине "Минск-2" (и совпадающей с нею по системе и характеру выполнения команд машине "Минск-22") случайными являются длительности операций сложения (+ 14, + 15, + 16, +17), вычитания (+ 24, + 25, + 26, + 27), вычитания модулей (+ 54, + 55, + 56, + 57), умножения (+ 34, + 35, + 36, + 37), выполняемых в режиме плавающей запятой, умножения с фиксированной запятой (+ 30, + 31, + 32, + 33), получения младших разрядов произведения (-70), нормализации (-75) и подсчета единиц (-76)[x].

Первые пять операций могут выполняться в четырех модификациях (их коды указаны в скобках после названия операций), которые отличаются только числом обращений к оперативной памяти.

Полное (или частичное) совпадение временных зависимостей у многих операций существенно облегчает наше рассмотрение.

Так, выражения (15) для операций вычитания те же, что и у соответствующих модификаций операции сложения, а операции вычитания модулей отличаются от них только характером выполнения нормализации. Операция получения младших разрядов произведения совпадает по временной характеристике с модификацией (+ 31), операции умножения - с фиксированной запятой. Много общего в выполнении операций умножения с фиксированной и плавающей запятыми. Почти полностью совпадают временные характеристики операций нормализации и счета единиц. Указанные выше модификации команд отличаются друг от друга только величиной τ_k^0.

В дальнейшем условимся вместо индекса k ставить код соответствующей операции "Минск-2".

---

[x] В нашем случае операции сдвига, обращения к внешним устройствам и др. выполняются во всех ЭМ за одно и то же время и не зависят от операнд. Длительность этих операций определяется параметрами, задаваемыми программистом, либо вырабатываемыми в ходе вычислений.

Умножение с фиксированной запятой (+33)

В машине "Минск-2" множимое одновременно умножается на два двоичных разряда множителя. Длительность операции (+33) зависит только от вида мантиссы множителя, которую можно рассматривать как последовательность случайных чисел $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m/2}$, каждое из которых принимает значения 00, 0I, I0, II ($m = 36$).

Процесс умножения можно разделить на три части: постоянную $\mathcal{E}^0_{+33} = 84$ мк сек[x)] и две переменные: $m/2$ - циклов умножения на η_k и $m/2+1$ -й - последний цикл.

Последовательности $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m/2}$ соответствует последовательность длительностей циклов умножения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m/2}$, принимающих значения $t_0 = 4$, либо $t_1 = 16$ мксек в зависимости от η_k и переноса от умножения на предыдущие $\eta_{k-1}, \eta_{k-2}, \dots, \eta_1$ (таблица I)

Таблица I

η_k	ξ_k перенос 0	ξ_k перенос I
00	t_0	t_1
0I	t_1	t_1
I0	t_1	t_1
II	t_1	t_0

Таблица 2

$\eta_{m/2}$	$\xi_{\frac{m}{2}+1}$ перенос 0	$\xi_{\frac{m}{2}+1}$ перенос I
00	t_0	t_0
0I	t_0	t_0
I0	t_0	t_1
II	t_1	t_1

Перенос "I" возникает только при $\eta_{k-1} = 11$, либо при

$$\eta_{k-1} = \eta_{k-2} = \dots = \eta_{k-i} = 10 \quad \text{и} \quad \eta_{k-i-1} = 11 \quad (i = 1, 2, \dots, k-2). \qquad (20)$$

Длительность $(\frac{m}{2} + 1)$-го цикла определяется таблицей 2.

---

x) Здесь и далее указывается время выполнения операций без учета затрат на модификацию адресов с помощью индексных ячеек. Длительность же операций с модификацией адресов больше на 24 мксек.

Приступим к расчету. Как видно из таблицы I, для η_{k-1} = 00, 0I или II независимо от остальных членов последовательности

$$P\left(\xi_k = t_0 \middle| \eta_{k-1}, \eta_{k-2}, \ldots, \eta_1\right) = P\left(\xi_k = t_0 / \eta_{k-1}\right) = \frac{1}{4} \; ; \tag{21}$$

для η_{k-1} = I0, в силу условия (20) ,

при η_{k-i-1} = II

$$P\left(\xi_k = t_0 \middle| \eta_{k-1}, \eta_{k-2}, \ldots, \eta_1\right) = P\left(\xi_k = t_0 / \eta_{k-1} = 11\right) = \frac{1}{4} \; ; \tag{22}$$

при η_{k-i-1} = 00

$$P\left(\xi_k = t_0 \middle| \eta_{k-1}, \ldots, \eta_1\right) = P\left(\xi_k = t_0 / \eta_{k-1} = 00\right) = \frac{1}{4} \; ; \tag{23}$$

при η_{k-i-1} = 0I

$$P\left(\xi_k = t_0 \middle| \eta_{k-1}, \ldots, \eta_1\right) = P\left(\xi_k = t_0 / \eta_{k-1} = 01\right) = \frac{1}{4} \tag{24}$$

и при

$$\eta_{k-1} = \eta_{k-2} = \cdots = \eta_1 = 10$$

$$P\left(\xi_k = t_0 \middle| \eta_{k-1}, \ldots, \eta_1\right) = P\left(\xi_k = t_0 / \eta_{k-1} = 01\right) = \frac{1}{4} \; . \tag{25}$$

Отсюда следует, что любые ξ_k и ξ_j независимы, одинаково распределены и принимают значения t_0 с вероятностью $\frac{I}{4}$ и t_1 с вероятностью $\frac{3}{4}$, поэтому

$$M \sum_{k=1}^{m/2} \xi_k = \frac{m}{2} M \xi_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 16\right) = \frac{m}{2} 13 = 234 \text{ мксек}, \tag{26}$$

$$D \sum_{k=1}^{m/2} \xi_k = \frac{m}{2} D \xi_1 = \frac{m}{2} 27 = 486 \cdot \text{мксек}^2. \tag{27}$$

Заметим, что независимость ξ_k и ξ_j вытекает из того, что η_k равновероятно принимают любое из четырех возможных значений и из особенностей (симметричности) табл. I.

Рассчитаем длительность $(\frac{m}{2}+1)$-го цикла, пользуясь табл. 2. Как нетрудно видеть,

$$P(\xi_{\frac{m}{2}+1}= t_o)=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}} ; \tag{28}$$

$$P(\xi_{\frac{m}{2}+1}= t_1)= \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}}\right) ; \tag{29}$$

$$M\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_o+\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}}\right)(t_1-t_o)\approx 8 \text{ мксек} ; \tag{30}$$

$$M\xi^2_{\frac{m}{2}+1}=t_o^2+\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}}\right)(t_1^2-t_o^2)\approx 96 \text{ мксек}^2 ; \tag{31}$$

$$D\xi_{\frac{m}{2}+1}= 32 \text{ мксек}^2. \tag{32}$$

Подсчитаем вероятности пар:

$$\left.\begin{aligned}
&P(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_o\ ,\ \xi_{\frac{m}{2}}=t_o,\ \eta_{\frac{m}{2}}=00)\approx\frac{1}{6};\\
&P(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_o\ ,\ \xi_{\frac{m}{2}}=t_1,\ \eta_{\frac{m}{2}}=00)\approx\frac{1}{12};\\
&P(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_o,\ \xi_{\frac{m}{2}}=t_1,\ \eta_{\frac{m}{2}}=01)\approx\frac{1}{4};\\
&P(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_o,\ \xi_{\frac{m}{2}}=t_1,\ \eta_{\frac{m}{2}}=10)=\frac{1}{6};\\
&P(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_1,\ \xi_{\frac{m}{2}}=t_1,\ \eta_{\frac{m}{2}}=10)=\frac{1}{12};\\
&P(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_1,\ \xi_{\frac{m}{2}}=t_o,\ \eta_{\frac{m}{2}}=11)=\frac{1}{12};\\
&P(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_1,\ \xi_{\frac{m}{2}}=t_1,\ \eta_{\frac{m}{2}}=11)=\frac{1}{6}.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Таблица 3

$\xi_{\frac{m}{2}}$ \ $\xi_{\frac{m}{2}+1}$	t_0	t_1
t_0	$\frac{I}{6}$	$\frac{I}{2}$
t_1	$\frac{I}{I2}$	$\frac{I}{4}$

Таблица 4

$\eta_{m/2}$	$\xi^*_{m/2}$	
	перенос	
	0	I
I0	$t_0 + t_1$	$2t_1$
II	$2t_1$	$t_0 + t_1$

Сравнение парных вероятностей для $\xi_{\frac{m}{2}+1}$ и $\xi_{\frac{m}{2}}$ (табл.3) с вероятностями для $\xi_{\frac{m}{2}+1}$ и $\xi_{\frac{m}{2}}$ показывает, что эти случайные величины независимы. Аналогично можно показать и независимость случайных величин $\xi_{\frac{m}{2}+1}$ и ξ_k, $k<m/2$. В итоге

$$M\tau_{+33} = \tau^o_{+33} + \frac{m}{2} M\xi_1 + M\xi_{\frac{m}{2}+1} = 84+234+8 = 326 \text{ мксек}; \quad (34)$$

$$D\tau_{+33} = \frac{m}{2} D\xi_1 + D\xi_{\frac{m}{2}+1} = 486+32 = 518 \text{ мксек}^2; \quad (35)$$

$$\frac{D\tau_{+33}}{(M\tau_{+33})^2} \approx 49\cdot 10^{-4} . \quad (36)$$

Соответствующие значения для модификаций этой операции + 30, + 3I, + 32 и операции получения младших разрядов произведения - 70 приведены в табл. 8

Умножение с плавающей запятой (+ 37)

Операция (+37) отличается от операции (+33) следующим:
I) добавляется 36 мксек на округление результата:

$$\tau^o_{+37} = \tau^o_{+33} + 36 = 120 \text{ мксек}; \quad (37)$$

2) уменьшается число разрядов мантиссы (m =28) и операнды, как правило, являются нормализованными, т.е. $\eta_{\frac{m}{2}}$ =I0 или II. В этом случае длительности $\frac{m}{2}$ -го и $(\frac{m}{2}+1)$-го циклов удобно рассматривать совместно, полагая $\xi^*_{\frac{m}{2}} = \xi_{\frac{m}{2}} + \xi_{\frac{m}{2}+1}$ (табл.4

Нетрудно видеть, что табл. 4 обладает тем же свойством симметрии, что и табл. I. Значения $\eta_{\frac{m}{2}}$, равные IO и II, по общему предположению о равновероятности операнд также равновероятны, поэтому аналогично (2I) - (24)

$$P\left(\xi^*_{\frac{m}{2}} = t_0 + t_1 \,\middle|\, \eta_{\frac{m}{2}-1}, \dots, \eta_1\right) = \frac{1}{2} \tag{38}$$

при любых последовательностях $\eta_{\frac{m}{2}-1}, \dots, \eta_1$. Значит, $\xi^*_{\frac{m}{2}}$ и ξ_j независимы, поэтому

$$M\sum_{k=1}^{m/2}\xi_k + M\xi_{\frac{m}{2}+1} = M\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}\xi_k + M\xi^*_{\frac{m}{2}} = \left(\frac{m}{2}-1\right)M\xi_1 + M\xi^*_{\frac{m}{2}} = \tag{39}$$

$$= 13\times 13 + 26 = 195 \text{ мксек};$$

$$D\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\xi_k = D\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}\xi_k + D\xi^*_{\frac{m}{2}} = \left(\frac{m}{2}-1\right)D\xi_1 + D^*_{\frac{m}{2}} = \tag{40}$$

$$= 13\times 27 + 36 = 387 \text{ мксек}^2.$$

5) Полученный результат нормализуется только на один разряд влево. На нормализацию в данных условиях требуется 4 мксек. В отличие от предыдущих случайных величин время нормализации ξ_H определяется как мантиссой множителя, так и мантиссой множимого. Если их обозначить соответственно через x и y, а результат через $z = y \cdot x$, то, как нетрудно видеть,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} \le x \le 1 - \frac{1}{2^m}; \\ &\frac{1}{2} \le y \le 1 - \frac{1}{2^m}; \\ &\frac{1}{4} \le z \le \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^2 < 1 - \frac{1}{2^m}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Ненормализованные числа будут лежать ниже кривой $y = \frac{1}{2x}$, а нормализованные-выше и на ней (рис. I). Откуда следует, что

$$\begin{aligned} &P(\xi_H = 4) = 0{,}39; \\ &P(\xi_H = 0) = 0{,}61; \end{aligned} \tag{42}$$

$$M\xi_H = 0{,}39\cdot 4 + 0{,}61\cdot 0 = 1{,}56 \text{ мксек}; \tag{43}$$

$$M\xi_H^2 = 0{,}39\cdot 16 + 0{,}61\cdot 0 = 6{,}24 \text{ мксек}^2; \tag{44}$$

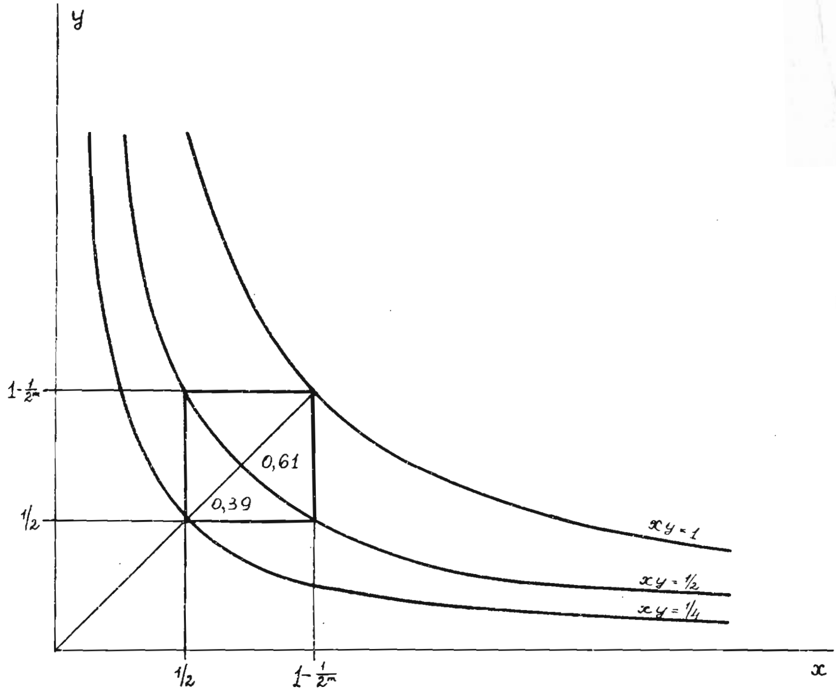

Рис.I.

$$\mathcal{D}\xi_H = 3{,}81 \text{ мксек}^2 . \tag{45}$$

Ковариация случайных величин ξ_H и $\sum\limits_{k=1}^{\frac{m}{2}+1} \xi_k$ будет:

$$\operatorname{Cov}\left(\xi_H, \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}+1} \xi_k\right) \leq \sqrt{\mathcal{D}\xi_H \cdot \mathcal{D}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}+1} \xi_k} = \sqrt{3{,}81 \cdot 387} \approx 38{,}4 \text{ мксек}^2 \tag{46}$$

В итоге

$$M\tau_{+37} = \tau^{\circ}_{+37} + M\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} \xi_k + M\xi^{*}_{\frac{m}{2}} + M\xi_H = \tag{47}$$

$$= 120 + 169 + 26 + 4 = 319 \text{ мксек} ;$$

$$\mathcal{D}\tau_{+37} = \mathcal{D}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}+1} \xi_k + \mathcal{D}\xi_k + 2\operatorname{Cov}\left(\xi_H, \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}+1} \xi_k\right) \leq \tag{48}$$

$$\leq 387 + 3{,}8 + 2 \cdot 38{,}4 \approx 468 \text{ мксек}^2 ;$$

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{+37}}{(M\tau_{+37})^2} = 46 \cdot 10^{-4} . \tag{49}$$

Соответствующие значения для других модификаций этой операции приведены в табл. 8.

Сложение с плавающей запятой (+ 31)

В машине "Минск-2", как и у большинства других ЭВМ, колебания длительности операции сложения с плавающей запятой связано с затратами времени на выравнивание порядков слагаемых и нормализацию результата.

Обозначим слагаемые до и после выравнивания порядков соответственно через $u' \cdot 2^{k_1}$, $v' \cdot 2^{k_2}$ и $u \cdot 2^{k}$, $v \cdot 2^{k}$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{При } k_1 \geq k_2 & k = k_1 , & \\ & u = u' , & \\ & v = 2^{-\varkappa} \cdot v' ; & \\ \text{при } k_1 < k_2 & k = k_2 , & \\ & u = 2^{-\varkappa} u' ; & \\ & v = v' , & \end{array}\right\} \tag{50}$$

где

$$\varkappa = |k_1 - k_2| .$$

Если округление не блокируется, то частное от деления на $2^{\ae}$ округляется до $1/2^{m}$ x).

Результат до нормализации равен

$$u\cdot 2^{k} + v\cdot 2^{k} = w\cdot 2^{k}\ , \qquad (51)$$

где $w = u + v$.

После нормализации он равен $w'\cdot 2^{k'}$,

где
$$\left.\begin{aligned} & w' = w\cdot 2^{\nu}, && \text{при } \frac{1}{2^{\nu+1}} \le |w| < \frac{1}{2^{\nu}}, \\ & k' = k - \nu && \nu = -1, 0, 1, \ldots, m-1; \\ & w' = 0, && \\ & k' = 63 && \text{при } 0 \le |w| < \frac{1}{2^{m}} \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Затраты времени на выравнивание порядков равны:

$$\left.\begin{aligned} & t_{\ae} = 4\ae \text{ мксек} && \text{при } 0 \le \ae \le 63^{\text{xx)}}, \\ & t_{\ae} = 0 && \text{при } 64 \le \ae . \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Время нормализации результата:

$$\left.\begin{aligned} & t_{\nu} = 16 \text{ мксек} && \text{при } \nu - 1 , \\ & t_{\nu} = 4\nu && \text{при } \nu = 0, 1, \ldots, m-1,\ 31^{\text{xxx)}} \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Здесь знак " - " соответствует нормализации вправо, а знак " + " - влево.

Таким образом, время выполнения операции (+17) зависит

---

x) В действительности в "Минске-2" округление выполняется после нормализации результата. После округления результат может оказаться ненормализованным и его нужно нормализовать вправо на один разряд. Однако нормализация после округления может возникнуть только тогда, когда не было нормализации до округления (результат оказался нормализованным). Поэтому перестановка местами округления и нормализации не влияет на общее время выполнения операции.

xx) При $m \le \ae \le 63$ выравнивание порядков делается для упрощения схем ЭВМ. Здесь $m = 28$.

xxx) При $w' = 0$ в "Минске-2" для однообразия схем выполняется нормализация влево на 31 разряд.

от двух случайных величин $\varkappa$ и ν. Так как между $\varkappa$ и ν существует зависимость, то приходится рассматривать все возможные пары значений $\varkappa$ и ν. В табл. 5 приведены длительности

$$\tilde{\tau}_{+17}(\varkappa,\nu)=\tau_{+17}(\varkappa,\nu)-\tau^{\circ}_{+17}\ ,$$

где τ_{+17} - постоянная часть затрат времени на выполнение операции (+I7), равная I24 мксек.

Дальнейший расчет требует знания законов распределения случайных величин $\varkappa$ и ν.

Закон распределения для случайной величины ν при фиксированном значении $\varkappa$ можно получить из вполне правдоподобного предположения, что мантиссы слагаемых с равной вероятностью принимают значения для одного слагаемого в интервале $(0,2^{m})$, для второго-$(0,2^{m-\varkappa})$.

Вычисление соответствующих условных вероятностей поясняется рис 2. Для простоты на этом рисунке приведен случай равновероятного распределения величин u и v в интервалах соответственно $\left(1,2-\frac{1}{2^m}\right)$ и $\left(0,2-\frac{1}{2^m}\right)$ либо $\left(0,2-\frac{1}{2^m}\right)$ и $\left(1,2-\frac{1}{2^m}\right)$.

С достаточной для наших расчетов точностью можно полагать значения вероятностей пропорциональными относительным размерам соответствующих площадей на рис. 2.

Значения условных математических ожиданий и вторых моментов для τ_{+17} приведены в табл. 6.

Определение распределения случайной величины $\varkappa$ было проведено по нашей просьбе Н.Я. Цыбренко. Статистика собиралась с помощью специальной программы во время счета задач линейного программирования и линейной алгебры на машине "М-20", имеющей то же число разрядов порядка, что и "Минск-2". Объем выборки был около $0,6\cdot 10^6$ операций. Полученному распределению $\varkappa$ соответствуют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} &M\tau_{+17}\approx 124+50=174\ \text{мксек}\ ,\\ &D\tau_{+17}\approx 3.600\ \text{мк сек}^2\ ,\\ &\frac{D\tau_{+17}}{(M\tau_{+17})^2}\approx 1200\cdot 10^{-4}\ . \end{aligned}\right\}\qquad(55)$$

Вычитание модулей с плавающей запятой (+ 57)

Расчеты для команды (+57) аналогичны приведенным выше для (+I7). Отличие состоит в том, что при определении условных вероятностей при фиксированной $\varkappa$ нужно рассматривать случаи, когда u и v различны по знаку (рис. 2). Условные математические ожидания и вторые моменты для этого случая представлены в табл. 7.

Для того же закона распределения случайной величины $\varkappa$, что и для операций вычитания, получаются следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} M\tau_{+57} &\approx 124 + 48 = 172 \text{ мксек}, \\ D\tau_{+57} &\approx 3700 \text{ мксек}^2, \\ \frac{D\tau_{+57}}{(M\tau_{+57})^2} &\approx 1250 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Нормализация (-75)

Команда выполняется за время

$$\tau_{-75} = 128 + 4\nu, \qquad (57)$$

где ν - число сдвигов числа для нормализации.

Распределение случайной величины ν зависит как от вида операции, в результате которой получилось нормализуемое число так и от операнд, над которыми эта операция выполняется.

Если предположить, что нормализуемое число принимает с равной вероятностью все значения в интервале $(0, 1 - \frac{1}{2^m})$ *), то

$$\begin{aligned} M\tau_{-75} &= 128 + 4\sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{2^{\nu+1}}\nu = 128 + 4 = 132 \text{ мксек}, \\ D\tau_{-75} &= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{2^{\nu+1}}(4\nu)^2 - \left(4\sum_{\nu=0}^{m} \frac{\nu}{2^{\nu+1}}\right)^2 = 34 \text{ мксек}^2. \end{aligned} \qquad (58)$$

Если предположить, что величина ν равномерно распределена в интервале $(0, m)$, то

$$\begin{aligned} M\tau_{-75} &= 128 + \frac{4}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m} \nu = 128 + 72 = 200 \text{ мксек}, \\ D\tau_{-75} &= \frac{16}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m} \nu^2 - \left(\frac{4}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m} \nu\right)^2 \approx 1720 \text{ мксек}^2. \end{aligned} \qquad (59)$$

---

*) Здесь $m = 36$.

Таблица 5

Значение длительности $\tau_n(\varkappa,\nu)-\tau_n^{*}$

$\nu \backslash \varkappa$	0	I	2	...	j	...	m −I=27	m =28	...	63	64	...	I27
−I	I6+0=I6	I6+4=20	I6+8=24	...	I6+4j	...	I6+I08=I24	0+II2=II2	...	252	0	...	0
0	0+0=0	0+4=4	0+8=8	...	0+4	...	0+I08=I08	0+II2=II2	...	252	0	...	0
I	4+0=4	4+4=8	4+8=I2	...	4+4j	...	4+I08=II2	0+II2=II2	...	252	0	...	0
2	8+0=8	8+4=I2											
...	...	...											
i	4+0=4	4+4											
...	...	...											
m-I	I08+0=I08	I08+4=II2											
3I	I24+0=I24	I24+4=I28											

$$\nu=i \longleftrightarrow \frac{1}{2^{i+1}} \leq |w| \leq \frac{1}{2^{i}}-\frac{1}{2^{m}}, \quad (i=-1,0,1,\ldots,m-1),$$

$$\nu=31 \longleftrightarrow 0 \leq |w| \leq \frac{1}{2^{m}} \quad ;$$

$$\varkappa=j \longleftrightarrow \frac{1}{2^{j}} \leq |v| \leq \frac{1}{2^{j-1}}-\frac{1}{2^{m}} \quad \frac{1}{2^{j}} \leq |u| \leq \frac{1}{2^{j-1}}-\frac{1}{2^{m}}, \ (j=-1,0,1,\ldots;m)$$

$$\varkappa=j \longleftrightarrow |v|=|u|=0, \quad (j=m+1,\ldots,127).$$

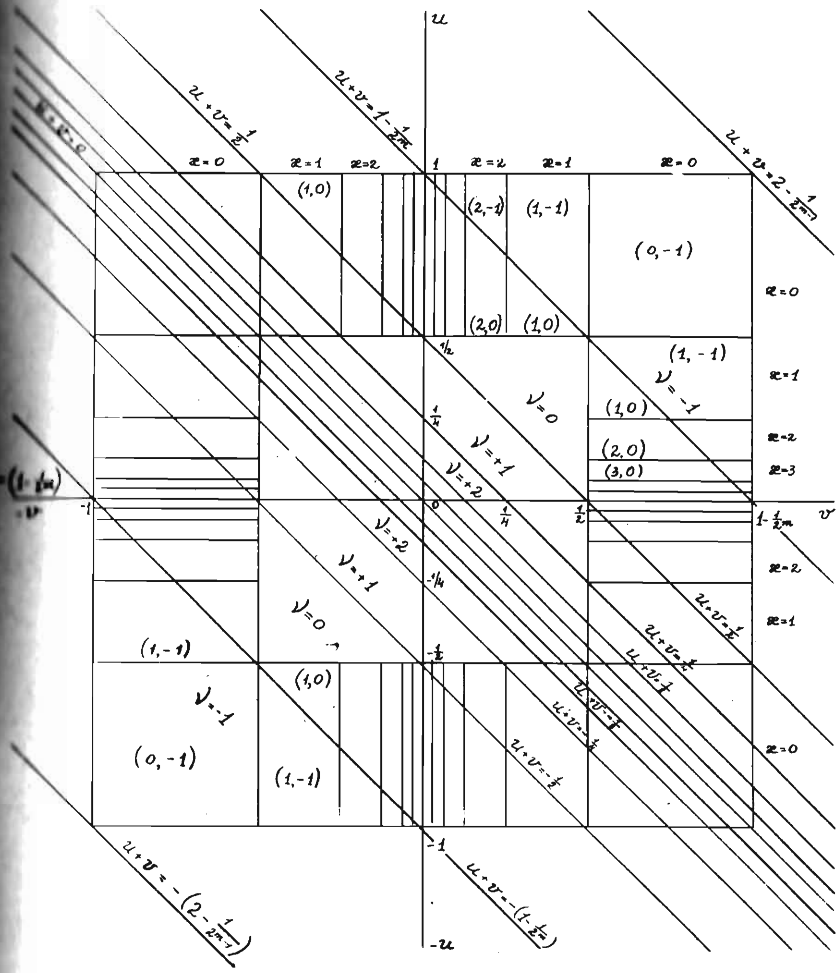

Рис.2.

Условные математические ожидания и вторые моменты для операций (+I7).

Таблица 6

æ	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
$M_{\vert æ=const}$	I3,333	I2,I66	II,75I	I3,875	I6,936	20,468	23,672	28,II6	32,058	36,029
$\mu^2_{\vert æ=const}$	206,I7	I93,I0	I75,00	228,90	298,73	425,I0	576,94	792,I2	I028,5	I298,4

æ	I0	II	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9
$M_{\vert æ=const}$	40,0I4	44,007	48,003	52,00I	56,000	60,000	64,000	68,000	7I,999	76,000
$\mu^2_{\vert æ=const}$	I60I,3	I936,7	2304,4	2704,2	3I36,I	3600,0	4096,0	4624,0	5I83,9	5776,0

æ	20	2I	22	23	24	25	26	27	28	29
$M_{\vert æ=const}$	80,000	84,000	88,000	92,000	96,000	I00,00	I04,00	I08,00	II2,00	II6,00
$\mu^2_{\vert æ=const}$	6400,0	7056,0	7744,0	8464,0	92I6,0	I0000	I08I6	II664	I2544	I3456

æ	30	3I	32	33	34	35	36	37	38	39
$M_{\vert æ=const}$	I20,00	I24,00	I28,00	I32,00	I36,00	I40,00	I44,00	I48,00	I52,00	I56,00
$\mu^2_{\vert æ=const}$	I4400	I5376	I6384	I7424	I8496	I9600	20736	2I904	23I04	24336

æ	40	4I	42	43	44	45	46	47	48	49
$M_{\vert æ=const}$	I60,00	I64,00	I68,00	I72,00	I76,00	I80,00	I84,00	I88,00	I92,00	I96,00
$\mu^2_{\vert æ=const}$	25600	26896	28224	29584	30976	32400	33856	35344	36864	384I6

æ	50	5I	52	53	54	55	56	57	58	59
$M_{\vert æ=const}$	200,00	204,00	208,00	2I2,00	2I6,00	220,00	224,00	228,00	232,00	236,00
$\mu^2_{\vert æ=const}$	40000	4I6I6	43264	44944	46656	48400	50I76	5I984	53824	55696

æ	60	6I	62	63	64
$M_{\vert æ=const}$	240,00	244,00	248,00	252,00	0,0000
$\mu^2_{\vert æ=const}$	57600	59536	6I504	63504	0,0000

Эта команда выполняется аналогично нормализации и отличается от последней только постоянной частью операции.

$$\tau_{-76} = 132 + 4\nu. \tag{60}$$

Поэтому все сказанное об операции (-75) справедливо и для операции (-76).

В заключение рассмотрим часто встречающийся случай - суммирование парных произведений.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + g_i . \tag{61}$$

Пусть используются две команды (+35) с модификацией адреса и (+ 16) без модификации адреса.

Согласно (7) имеем:

$$M\tau_{\tau\ell} \leq \sqrt{\frac{(\ell-1)}{2\tau} \cdot \left(D\tau_{+35} + D\tau_{+16}\right)} \ ; \tag{62}$$

$$\left(\frac{M\tau_{\tau\ell}}{\frac{1}{\tau}\sum\limits_{k=1}^{s}\tau_k M\tau_k}\right)^2 \leq \frac{\frac{\ell-1}{2\tau}\left(D\tau_{+35}+D\tau_{+16}\right)}{\frac{1}{4}\left(M\tau_{+35}+M\tau_{+16}\right)^2} = \frac{2(\ell-1)}{\tau}\,\frac{D\tau_{+35}+D\tau_{+16}}{\left(M\tau_{+35}+M\tau_{+16}\right)^2} .$$

Потребуем, чтобы эта величина была менее $\mathcal{E}^2$. Это, очевидно, будет при

$$\tau_{min} \geq \frac{2(\ell-1)}{\mathcal{E}^2}\,\frac{D\tau_{+35}+D\tau_{+16}}{\left(M\tau_{+35}+M\tau_{+16}\right)^2} , \tag{63}$$

откуда для $\mathcal{E}$ = 0,01 получим, используя табл. 8 ,

$$\tau_{min} \geq 260(\ell-1) . \tag{64}$$

Для получения абсолютной, но более грубой оценки (14), нужно взять значения для операции сложения (+17). Тогда

$$\tau_{min} \geq 1200\,(\ell-1) . \tag{65}$$

Для задач с большим объемом вычислений, рассмотренных в [1] , обычно удается удовлетворить условию (65) и тем более условию (64).

Таблица 8

	$M\tau_к$		$D\tau_к$	$M\tau_к/M\tau_к^2$	
	мксек		мксек^2	$\times 10^4$	
операции	б/модиф.	с модиф.		б/модиф.	с модиф.
+I4	222	246	3660	730	600
+I5,+I6	I98	222	3600	920	730
+I7	I74	I98	3600	I200	920
+24	222	246	3600	730	600
+25,+26	I98	222	3600	920	730
+27	I74	I98	3600	I200	920
+30	374	398	5I8	37	33
+3I,+32	350	374	5I8	42	37
+33	326	350	5I8	49	42
+34	367	39I	468	35	34
+35,+36	343	367	468	40	35
+37	3I9	343	468	46	40
+54	220	244	3700	760	620
+55,+56	I96	220	3700	960	760
+57	I72	I96	3700	I250	960
-70	350	374	5I8	42	37
-75	I32÷200	I56÷224	34÷I720	20÷430	I4÷340
-76	I36÷204	I60÷228	34÷I720	I8÷4I0	I3÷330

В заключение авторы выражают свою признательность инженерам В.Я. Пыхтину за консультации по характеру выполнения операций в ЭВМ "Минск-2" и Н.Я.Цыбренко за представление статистических данных.

Литература

1. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. О решении задач на универсальных вычислительных системах. - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1965, вып. 17, стр. 106-164.
2. Э.В. Евреинов. Универсальные вычислительные системы с частично переменной структурой. - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1965, вып. 17, стр. 3-60.
3. Э.В. Евреинов, Г.П. Лопато. Универсальная вычислительная система "Минск-222". - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1966, вып. 23, стр. 13-20.

Поступила в редакцию
7 октября 1966 г.