

УДК 681.142.019.322

О СТРУКТУРАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ,
УСТОЙЧИВЫХ К ИЗМЕНЕНИЮ ЧИСЛА МАШИН

Ю.Г. Косарев

При разработке многомашинных вычислительных систем (ВС) [1] приходится учитывать возможность выхода из строя элементарных машин (ЭМ) и других элементов ВС как вследствие недостаточной их надежности, так и неблагоприятных внешних воздействий (перегрев, радиация, механические повреждения и т.п.). Желательно, чтобы в этих условиях ВС не только сохраняли работоспособность, но и смогли продолжить прерванный неисправностью процесс решения задачи и, более того, чтобы время восстановления работоспособности было достаточно малым.

Для облегчения решения данной проблемы рассматриваются два взаимно дополняющих друг друга пути:
повышение устойчивости системы к выходу отдельных элементов путем локализации неисправностей в возможно меньшей части ВС;

уменьшение времени восстановления работоспособности путем применения структур ВС, устойчивых к выходу из строя любого её элемента.

1. Локализация неисправностей. Основными мерами на случай выхода ЭМ из строя служат дублирование информации и резервирование. Наиболее экономичный и в

то же время эффективный способ резервирования — взаимное резервирование. В этом случае все ЭМ участвуют в решении задачи. Исходная информация дублируется и хранится одновременно в двух или более ЭМ. Решение задачи разбивается на интервалы, длительности которых выбираются такими, чтобы вероятность выхода из строя более одной ЭМ в течение интервала и времени восстановления работоспособности была достаточно малой. Каждый интервал заканчивается проверкой исправности ЭМ и засылкой промежуточных материалов в дублирующие машины.

После выхода какой-либо ЭМ из строя ВС перестраивается на режим работы с меньшим (на единицу) числом ЭМ. При этом в зависимости от вида поломки информация извлекается либо из исправной, либо из дублирующих ЭМ; информация (и её дубликаты) перераспределяется между ЭМ; программа перестраивается на режим работы с другим числом ЭМ и возвращается на один интервал [1].

С увеличением числа машин, взаимно резервирующих друг друга, растет вероятность выхода из строя хотя бы одной из них. Это вынуждает уменьшать величину интервала, что ведет к увеличению потери времени на контроль, на дублирование промежуточной информации, а также на восстановление работоспособности. Эти потери можно уменьшить, если система допускает программное разбиение на произвольные автономные подсистемы, как это делается, например, в однородных универсальных ВС с программируемой структурой (УВС) [1]. В этом случае, применяя взаимное резервирование внутри каждой подсистемы, можно локализовать влияние выхода из строя любой ЭМ в пределах одной подсистемы.

Рассмотрим этот процесс несколько подробнее. Пусть в начале все подсистемы загружены равномерно, тогда все они одновременно (или почти одновременно) приходят к моментам синхронизации для обмена информацией. После выхода ЭМ из строя подсистема, в которой это произошло, будет приходить к моментам синхронизации последней и заставит ожидать себя остальные подсистемы. Очевидно, многомашинные системы (а именно они и имеются в виду) всегда можно разбить на подсистемы так, что выход из строя любой из ЭМ будет мало сказываться на производительности системы. Например, в системе из 100 машин при 10 подсистемах по 10 машин в каждой выход из строя по одной машине в подсистеме уменьшит производительность примерно на 10%. При неравно-

мерном выходе ЭМ свойство программируемости структуры позволяет перераспределить ЭМ между подсистемами, не затрагивая, как правило, всей системы. После выхода из строя 10 машин образуем 9 подсистем по 10 ЭМ в каждой и т.д.

В простейшем случае вся информация, имеющаяся в каждой ЭМ, дублируется в другой машине. Например, каждая ЭМ с номером i дублирует машину с номером $i \oplus 1$ ($i = 1, \dots, \kappa$; \oplus - сложение по $\text{mod } \kappa$). При таком дублировании вся информация может быть восстановлена и решение продолжено, если одновременно не вышли из строя и дублирующая, и дублируемая ЭМ. При 10 подсистемах по 10 машин в каждой такое дублирование обеспечивает восстановление информации даже при одновременном выходе из строя до 50 ЭМ (все ЭМ с четными или нечетными номерами в каждой подсистеме).

2. Структуры, устойчивые к изменению числа элементов.

2.1. Рассмотрим конечное множество M и его разбиение на классы M_1, \dots, M_s ($\bigcup_{i=1}^s M_i = M$; $M_i \cap M_j = \emptyset$ ($i \neq j$)).

Бинарное отношение $R = R_{ij} \subseteq M_i \times M_j$ назовем замкнутым, если хотя бы при одном порядке нумерации элементов для всех $a_{in} \in M_i$, $a_{jm} \in M_j$, связанных отношением R , имеет место

$$R(a_{in}, a_{jm}) \rightarrow R(a_{i, n \ominus 1}, a_{j, m \ominus 1}), \quad (I)$$

где \ominus означает сложение по модулям $m_i = |M_i|$ и $m_j = |M_j|$, соответственно. Множество M , на котором заданы замкнутые бинарные отношения R_1, R_2, \dots, R_r (и только они), назовем K -однородным по R_1, R_2, \dots, R_r или просто K -однородным.

2.2. Поставим во взаимно однозначное соответствие элементам K -однородного множества M множество вершин графа G , а множеству отношений $R_\ell(a_{in}, a_{jm})$ - множество дуг τ_ℓ , соединяющих вершины, которым соответствуют элементы a_{in} и a_{jm} . Такие графы назовем K -однородными (рис. I).

2.3. Можно показать справедливость следующего утверждения:

ЛЕММА I. Если бинарное отношение $R(a_{in}, a_{jm})$ замкнуто, то и инверсное к нему отношение $R^{-1}(a_{jm}, a_{in})$ также замкнуто.

2.3. ЛЕММА 2. Каждый элемент $\alpha_{in} \in M_i$ K -однородного множества M связан отношением R с одинаковым числом κ_i ($\kappa_i = 1, \dots, m_j$) элементов $\alpha_{jm} \in M_j$ и, наоборот, каждый элемент α_{jm} связан бинарным отношением (R^{-1}) с одинаковым числом κ_j ($\kappa_j = 1, \dots, m_i$) элементов α_{in} .

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из соотношения (I).

2.4. K -однородное множество, которое остается K -однородным после удаления из него любого из элементов класса M_i , назовем устойчиво K -однородным относительно M_i .

Множества, которые УК-однородны относительно любого из классов, назовем полностью УК-однородными (рис. I, в, г.). K -однородные множества, у которых УК-однородность выполняется только для некоторого из его классов, назовем частично УК-однородными (рис. I, д.).

ЛЕММА 3. Классы УК-однородных множеств содержат не менее двух элементов.

Справедливость леммы непосредственно следует из того, что классы УК-подмножеств по определению не пусты.

ЛЕММА 4. Множество $Q = M_i \cup M_j, M_i \cap M_j = \emptyset$ K -однородно, если каждый элемент $\alpha_{in} \in M_i$ соединен отношением R с каждым элементом $\alpha_{jm} \in M_j$.

Из условия леммы следует, что имеются все возможные пары отношений $R(\alpha_{in}, \alpha_{jm})$; ($n = 1, \dots, m_i$; $m = 1, \dots, m_j$). Отсюда непосредственно вытекает выполнимость условия (I) и справедливость леммы.

ТЕОРЕМА. K -однородное множество M , состоящее из классов M_1, \dots, M_s , УК-однородно по R тогда и только тогда, когда отношение $R(\alpha_{in}, \alpha_{jm})$ существует для всех пар элементов из

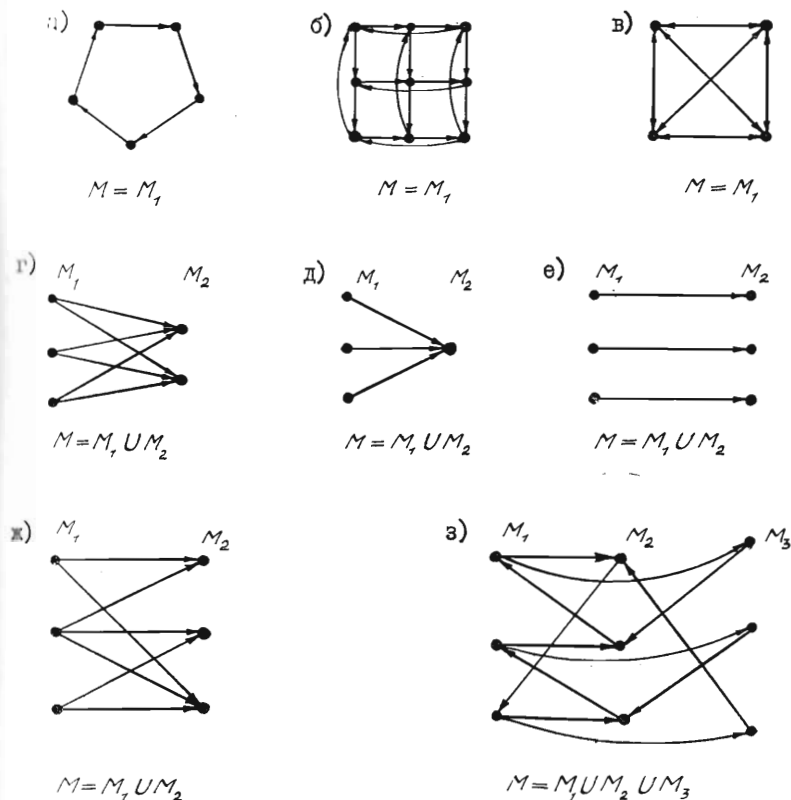


Рис. I. Примеры К-однородных графов

классов M_i и M_j , на которых это отношение определено.

Из К-однородности множества M следует К-однородность множества $Q = M_i \cup M_j$. Предположим, что каждый из элементов $a_{im} \in M_i$ соединен отношением R с $\kappa_j < m_j$ элементами $a_{jm} \in M_j$. Каждый элемент a_{jm} соединен отношением R^{-1} с $\kappa_i < m_i$ элементами a_{im} . Удалим из класса M_j какой-либо из элемен-

тов. Тогда все элементы a_{in} , связанные с ним отношением R , окажутся связанными по R с k_j-1 элементами класса M_j , а все остальные элементы a_{in} останутся соединенными с k_j элементами, т.е. в согласии с леммой 2 множество Q , а следовательно, и множество M не УК-однородно. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Для доказательства достаточности рассмотрим то же множество $Q = M_i \cup M_j$ и предположим, что каждый элемент a_{in} связан бинарным отношением R с каждым из элементов a_{jm} ($n=1, \dots, m_i$; $m=1, \dots, m_j$). Иначе говоря, имеются все возможные пары вида $R(a_{in}, a_{jm})$. Удалим любой из элементов a_{jm} . Тогда оставшиеся m_j-1 элементов образуют множество M_j' (вообще говоря, отличающееся от множества M_j нумерацией элементов). Все элементы a_{in} связаны отношением R с каждым из элементов множества M_j' . Поэтому, согласно лемме 4, множество Q УК-однородно. Из произвольности выбора классов M_i и M_j следует справедливость достаточности и теоремы в целом.

ЗАМЕЧАНИЕ. Справедливость теоремы легко распространяется на случай нескольких бинарных отношений R_1, \dots, R_2 .

СЛЕДСТВИЕ. УК-однородные множества и после удаления из них любого элемента остаются УК-однородными при условии, что в каждом из их классов остается более одного элемента.

2.5. За меру устойчивости УК-однородного множества возьмем

$$y = \sum_{i=1}^S m_i - S \quad (2)$$

— наибольшее число элементов, которое может быть исключено без нарушения К-однородности.

Пусть исключение элементов из УК-однородного множества происходит случайным образом и $P_i(t)$ — вероятность исключения за время t любого из элементов класса $M_i \subset M$. Тогда вероятность того, что за время t множество M останется К-однородным:

$$R(t) = \prod_{i=1}^S R_i(t), \quad (3)$$

где $R_i(t) = 1 - [P_i(t)]^{m_i}$, назовем функцией надежности множества M . Аналогичная функция надежности может быть получена и для двух случайных процессов — исключающего и

восстанавливающего [2].

Очевидно, что при фиксированном $m = \sum_{i=1}^S m_i$, $R(t)$ достигает наибольшей величины, когда

$$R_i(t) = R_j(t) \quad (i, j = 1, \dots, S), \quad (4)$$

Множества, обладающие этим свойством, назовем **равномерно надежными**.

Вообще говоря, равномерно надежные или близкие к ним множества могут содержать одноэлементные классы, если математическое ожидание исключения их единственных элементов не превышает математического ожидания исключения всех элементов в любом другом классе. Подобная ситуация возникает, если у k -однородного множества наложен запрет на исключение элементов из некоторых классов, а по каждому из остальных классов множество M УК-однородно. Такие множества назовем **квази УК-однородными**.

3. Основные типы схем обмена.

3.1. Изобразим ЭМ в виде вершин и соединим ориентированными дугами те из них, которым соответствуют ЭМ, обменивающиеся информацией в данный момент времени. Полученный в результате ориентированный граф назовем **схемой обмена**.

Множество различных схем обмена, возникающих при данной реализации задачи на УВС, назовем **полной схемой обмена**.

3.2. Схемы обмена S_1 и S_2 , у которых нет общих изолированных вершин, назовем **независимыми**. Аналогично, схемы обмена S_1, \dots, S_p , любая пара которых независима, назовем **попарно независимыми**.

3.3. Схемы обмена, состав и порядок чередования которых при реализации данной задачи не зависят от исходных данных, назовем **стационарными**. Схемы обмена, у которых не зависит от исходных данных только их состав, назовем **квазистационарными**.

3.4. Схемы обмена, к изолированным вершинам которых примыкает либо по одной дуге, либо несколько когерентных дуг (которым соответствует одновременная передача одной и той же информации), назовем **простыми**.

Из простых схем выделим:

парные, каждая вершина которых смежна не более, чем с одной другой вершиной;

парные смежные, каждая вершина которых смежна только с соседними по номеру вершинами;

тривексионные, у которых от одной из вершин выходят когерентные дуги ко всем неизолированным вершинам.

3.5. Схемы обмена, у которых каждая из входящих в схему вершин принадлежит одному и только одному уровню M_0, M_1, \dots, M_n и вершины из уровня M_i смежны только с вершинами из уровней M_{i-1}, M_i, M_{i+1} , назовем **иерархическими**.

Иерархические схемы, у которых вершины из уровня M_i соединяются с вершинами уровня M_j ($j = i-1, i+1$) дугами только одной ориентации, назовем **односторонними** и при $j > i$ — **нисходящими**, а при $j < i$ — **восходящими**.

Важный случай иерархических схем — **схемы обмена типа дерева**.

3.6. Схему обмена, определенную на одномерно перенумерованном множестве вершин, которая может быть разбита на подсхемы так, что: каждая неизолированная вершина входит только в одну подсхему; нет смежных вершин, входящих в различные подсхемы; для любой пары подсхем все номера одной подсхемы строго больше всех номеров другой, назовем **линейно сегментируемой**, а её подсхемы **сегментами**.

Линейно сегментируемые схемы, все сегменты которой — простые схемы обмена, назовем **линейными**.

3.7. Приведенные выше типы схем обмена предъявляют, вообще говоря, различные требования к системе коммутаций (СК). По этому свойству подразделим схемы обмена на **одно-, дву- и n -канальные** по наибольшему числу ориентированных дуг (входящих и выходящих) из какой-либо её вершины.

3.8. Разобьем схему обмена S на подсхемы S_1, \dots, S_n , в каждой из которых те же вершины, что и в схеме S , и каждая дуга схемы S входит хотя бы в одну подсхему. Такие подсхемы назовем **составляющими**, а их совокупность — **покрытием**.

По наименьшему числу составляющих в реализуемых с помощью данной СК покрытиях будем говорить об одно-, двух- и тактовых схемах обмена.

4. Типы УВС. Распространим введенные выше определения на УВС. У однородных УВС имеется множество элементарных машин и множество коммутаторов, а также система соединений — каналы связи, реализующие отношение \mathcal{R} (либо отношения $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_z$, если эти каналы \approx различных типов).

4.1. УВС назовем **к-однородными**, если система соединений ЭМ между собой, между ЭМ и коммутаторами удовлетворяет условию (1); **УК-однородными**, если условие (1) сохраняется при выходе из строя ЭМ или коммутатора; **частично УК-однородными**, если условие (1) сохраняется только при выходе из строя ЭМ; **квази-УК-однородными**, если выход из строя коммутатора или канала связи считается маловероятным событием.

Есть основания считать, что среднее время восстановления работоспособности УВС τ при прочих равных условиях тем меньше, чем ближе структуры системы до и после выхода из строя любой ЭМ (или других элементов УВС). По этому свойству УВС упорядочивается следующим образом:

$$\tau_{не\text{-}к\text{-}одн.} > \tau_{к\text{-}одн.} > \tau_{част.\text{УК}\text{-}одн.} > \tau_{квази\text{УК}\text{-}одн.} > \tau_{УК\text{-}одн.} \quad (5)$$

4.2. Будем различать также УВС по свойствам системы коммутаций, к которой отнесем каналы связи и коммутаторы.

4.3. Систему коммутаций СК, которая может для произвольной схемы обмена реализовать все составляющие хотя бы одного ее покрытия, назовем **универсальной**.

4.4. СК, которые могут однократно реализовать любую схему обмена, назовем **полными**.

Среди неполных СК будем различать **простые**, **парные**, **трансляционные**, **иерархические**, **линейные** и т.п., которые могут однократно реализовать любые простые, парные, трансляционные, иерархические, линейные и т.п. схемы обмена соответственно.

5. Примеры УК-однородных УВС.

5.1. Вариант А. Все M ЭМ непосредственно соединены друг с другом каналами связи. Такая УВС, по определению, **УК-одно-**

родна и равномерно надежна (канал связи можно отнести к ЭМ, из которой он выходит, и считать, что его неисправность ведет к выходу из строя всей ЭМ). Если ЭМ может одновременно работать со всеми $2M-I$ каналами, то её СК будет полной. При одноканальной работе СК реализует множество простых схем обмена.

Этот вариант может использоваться при небольшом числе ЭМ. С увеличением M требуется огромное число каналов связи ($2M^2 - M$) и усложняются коммутаторы каждой ЭМ ($K_{ЭМ}$).

Из других недостатков следует отметить, что при наращивании УВС необходимо вносить изменения и в $K_{ЭМ}$.

5.2. Вариант Б. Все ЭМ объединены через общий коммутатор. Прямой связи между ЭМ нет. Число каналов связи минимально и равно $2M$ при односторонних каналах. Такой коммутатор в принципе позволяет реализовать множество простых схем обмена. Нетрудно видеть, что данный вариант системы коммутаций частично УК-однороден. Выход из строя коммутатора ведет к нарушению нормального функционирования всей УВС в целом.

Сложность коммутатора растет с увеличением числа ЭМ и может стать сравнимой по сложности с ЭМ при вполне реальных значениях M . Превращение такой УВС в квазиУК-однородную путем введения в коммутатор избыточных элементов связано с усложнением и так довольно сложной схемы коммутатора. Не исключено, что для повышения живучести СК выгоднее установить в системе несколько коммутаторов, с каждым из которых соединены все ЭМ, т.е. перейти к УК-однородной структуре УВС.

Данный вариант СК так же, как и предыдущий, сложен технически при большом числе ЭМ, зато при увеличении числа ЭМ требует изменения только схемы коммутатора, оставляя неизменными схемы ЭМ.

5.3. Вариант В. ЭМ объединяются через магистральный канал связи (рис.2.).

Нетрудно видеть, что данный вариант однотактно реализует любую линейную схему обмена, так как коммутаторы (K) могут перекрывать магистральный канал и разбивать его на независимые участки. Действительно, присвоим любой ЭМ номер 1, ближайшей справа по месту включения в магистральный канал - номер 2 и т.д. Число коммутаторов равно числу ЭМ, поэтому при любом разбиении в каждом участке будут ЭМ с номерами, совпадающими с отрез-

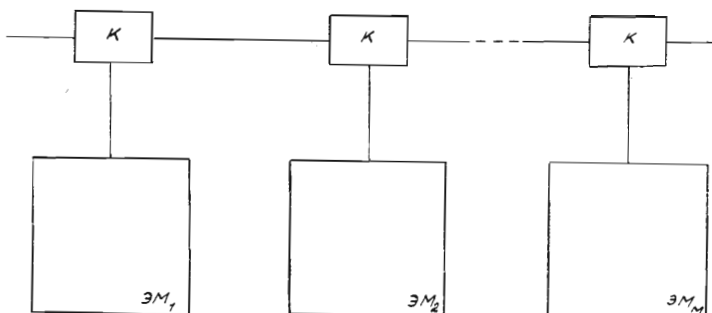


Рис. 2. Структура УВС магистрального типа.

ном натурального ряда чисел. Это позволяет разбивать УВС на подсистемы 2^{M-1} способами: от одной подсистемы, в которую входят все ЭМ, до M подсистем, в каждую из которых входит одна ЭМ.

Данный вариант позволяет за два такта реализовать некоторые простые схемы обмена: парный обмен между соседними по номеру ЭМ и схемы типа цепочки. На первом такте все нечетные по номеру ЭМ передают информацию четным. При этом (пусть M четно) магистральный канал перекрыт в $M/2$ местах между четными и нечетными по номерам ЭМ. На втором такте все четные ЭМ передают информацию нечетным. Магистральный канал при этом перекрыт между нечетными и четными ЭМ.

На реализацию произвольных схем парных обменов или иерархических схем обмена может потребоваться до $M/2$ тактов.

По типу вариант В относится к частично УК-однородным УВС, а если считать, что выход из строя магистрального канала - событие маловероятное (благодаря простоте коммутатора и относительно небольшому числу каналов связи), то - к квазиУК-однородным.

Однако по мере роста числа ЭМ и числа коммутаторов увеличивается вероятность выхода из строя магистрального канала, поэтому для больших M этот вариант может оказаться неудовлетворительным.

Немаловажное достоинство данного варианта по сравнению с

предыдущим состоит в простоте наращивания производительности системы. При этом лишь добавляются коммутаторы в магистральный канал связи.

5.4. Вариант Г. Для увеличения надежности варианта В можно ввести вместо одного магистрального канала несколько (рис.3) и тем самым сделать структуру УВС УК-однородной. Число вводимых магистралей определяется надежностью линий связи и коммутаторов. Можно только сказать, что коммутаторы, которые здесь нужны, довольно просты и их надежность значительно выше надежности ЭМ.

Заметим также, что в данном варианте усложняется по сравнению с вариантом В и сама ЭМ из-за включения в нее коммутатора ($K_{ЭМ}$) (а возможно, и дополнительных регистров для одновременного обмена с различными магистральями). Поэтому число магистралей K не должно быть большим. С увеличением числа магистралей растет также число однократно реализуемых схем обмена.

5.5. Вариант Д. Система коммутаций, использующая простые магистральные каналы (рис.4). Данный вариант обладает наибольшей надежностью системы коммутаций, т.к. вне ЭМ находятся лишь провода. Зато блоки коммутаций $BK_{ЭМ}$ в каждой ЭМ усложняются по сравнению с вариантом Г. Как и в варианте Г, УВС - УК-однородна. Система разбивается на подсистемы путем подсоединения ЭМ к тем или иным простым магистралям.

Нетрудно видеть, что при $M/2$ простых магистралях реализуемыми оказываются не только линейные, но и многие сложные схемы обмена, например, иерархические, произвольные парные схемы обмена. По своим возможностям данный вариант мало отличается от варианта А, но значительно проще его.

5.6. Вариант Е. При объединении большого числа машин с помощью сегментируемых магистралей время распространения сигнала по магистрали может возрасти до заметных размеров. Избежать этого можно, если перейти от линейных магистралей к магистральным сетям. В узлах таких сетей находятся коммутаторы с $2^{\mathcal{N}} + K$ полюсами, где \mathcal{N} - размерность сети, K - число каналов, соединяющих коммутатор с ЭМ, которой он принадлежит (рис.5). Каждому коммутатору может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие элемент \mathcal{N} - мерной матрицы. Коммутаторы, которым соответствуют элементы из одной строки, входят в одну магистраль. Назовем магистрали, соответствующие одноименным строкам,

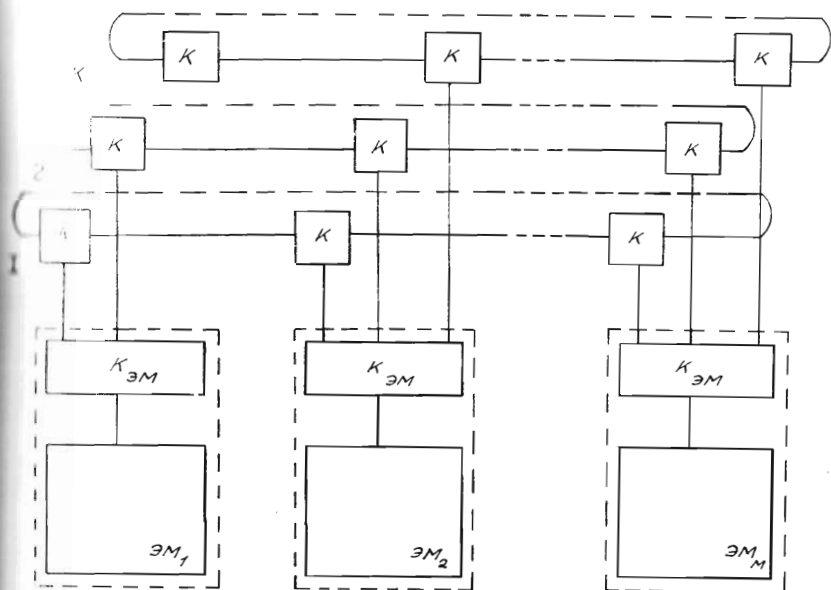


Рис.3. Структура УВС с несколькими магистральными каналами

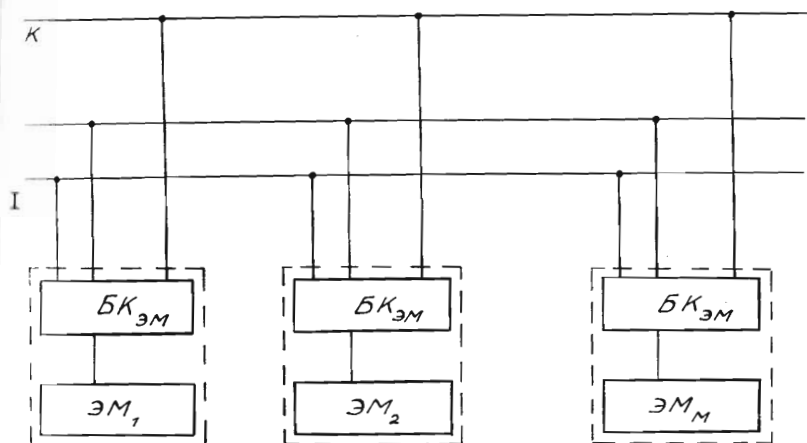


Рис.4. Структура УВС с несколькими простыми магистральными каналами связи

с е м е й с т в о м магистралей. Каждый коммутатор входит в 72 магистралей из различных семейств.

Можно видеть, что ЭМ, объединенные общей магистралью, частично УК-однородны. Если рассматривать каждую магистраль одного семейства с входящими в неё ЭМ как один элемент, то множество таких элементов будет УК-однородно.

Для сетей взаимное резервирование естественно осуществлять среди ЭМ, относящихся к одной магистрали. При возникновении различий между магистралями более чем на одну ЭМ, возможна "передача" ЭМ из одной магистрали в другую с помощью магистралей другого измерения.

К достоинствам магистральных сетей следует также отнести возможность одноканальной реализации многих простых и иерархических схем обмена. Изучение свойств магистральных сетей, в частности, выбор размерности сети, типа коммутатора и системы управления им представляет большой интерес.

В ы в о д ы

1. Из рассмотрения вариантов структуры можно сделать вывод о принципиальной возможности построения УВС, однородных не только по составу элементарных машин и устройств коммутации, но и по структуре соединений между ними, причем эта структура может сохраняться при выходе из строя как ЭМ, так и коммутационных устройств, т.е. показана принципиальная возможность построения УК-однородных УВС.

2. Показано также, что применение магистральных каналов позволяет построить УК-однородные УВС с меньшими затратами оборудования, чем при непосредственной связи всех ЭМ друг с другом (вариант А).

3. Из данного рассмотрения следует, что УВС, у которых ЭМ объединяются с помощью общего коммутатора (вариант Б), не УК-однородны и обладают меньшей надежностью, чем УВС магистрального типа. Вариант Б, хотя и может найти применение для систем, состоящих из небольшого числа машин, как например, для объединения в систему ЭВМ "Минск-32", для многомашинных систем оказывается малоприменимым. Он не может быть также рекомендован для систем управления важными объектами при сильных внешних воздействиях. В таких условиях все преимущества будут также на

стороне УВС магистрального типа. УВС магистрального типа (варианты В, Г, Д, Е) позволяют реализовать широкий класс схем обмена. На основании сформулированных в начале параграфа критериев: бы-

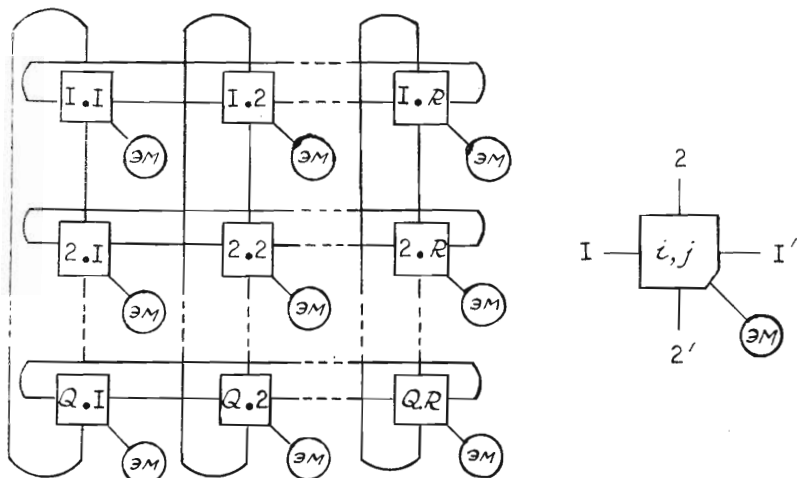


Рис. 5. Двумерная магистральная сеть

строты восстановления работоспособности, живучести, простоты программирования в условиях изменяющегося числа машин и т.п., - УВС магистрального типа заслуживают серьезного внимания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.В. ЕВРЕЙНОВ, Ю.Г. КОСАРЕВ. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, Изд-во "Наука" СО, 1966.
2. В.Г. ХОРОШЕВСКИЙ. Живучие однородные универсальные вычислительные системы. - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука" СО, вып.34, 1969, стр.71-89.

Поступила в редакцию
22 марта 1970 г.